

ASSISTANT PROFESSOR TRB
STATE LEVEL MOCK TEST
MATHEMATICS
ANSWER KEY

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	C	B	A	A	A	C	B	A	A
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	C	C	B	D	C	C	A	D	B
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
C	D	A	A	D	A	D	A	A	A
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
C	A	B	C	D	D	B	C	A	B
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
B	A	B	C	A	D	A	C	B	C
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
C	B	A	C	C	B	B	C	C	A
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
B	B	C	C	B	A	B	B	B	D
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
B	B	A	B	A	B	A	B	C	C
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
B	B	A	C	A	C	A	A	A	B
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
C	B	A	C	B	B	D	A	C	A
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
C	C	B	C	A	B	A	D	B	C
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
A	B	C	B	B	B	A	A	B	A
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
C	C	C	B	B	A	C	C	C	C

Assistant Professor TRB

Subject : தமிழ் தகுதி தேர்வு
விடை மற்றும் விளக்கங்கள்

1. போருழந் தெடுத்த ஆரெயில் நெடுங்கொடி

‘வாரல்’ என்பனபோல் மறித்துக்கை காட்ட” – இப்பாடலில் இடம் பெற்றுள்ள அணி -----

அ. ஏகதேச உருவக அணி

ஆ. எடுத்துக்காட்டு உவமை அணி

இ. தற்குறிப்பேற்ற அணி

ஈ. நிரல் நிரை அணி

விடை : இ. தற்குறிப்பேற்ற அணி

விளக்கம்:

இப்பாடலில் இடம் பெற்றுள்ள அணி தற்குறிப்பேற்ற அணி ஆகும், ஏனெனில், இயல்பாகக் காற்றால் அசையும் கொடிகளை, 'வாராதே' என்று கவிஞர் தன் குறிப்பை ஏற்றிக் கூறுவதால் இது தற்குறிப்பேற்ற அணி எனப்படும்.

தற்குறிப்பேற்ற அணி (Paronomasia / Personification): இயல்பாக நிகழும் ஒரு நிகழ்வின் மீது கவிஞர் தன் குறிப்பையோ அல்லது கருத்தையோ ஏற்று கூறுவது தற்குறிப்பேற்ற அணி எனப்படும். இங்கு, மதுரைக் கொடிகள் காற்றின் அசைவால் அசைகின்றன. ஆனால், அவை 'வாரல்' (வாராதே) எனத் தடுப்பது போல் கவிஞர் தன் குறிப்பை ஏற்றுள்ளார்.

2. தன்மை அணியை..... என்றும் கூறுவர்.

அ) தீவக அணி

ஆ) உவமை அணி

இ) தன்மை நவிற்கி அணி

ஈ) தற்குறிப்பேற்ற அணி

விடை : இ) தன்மை நவிற்கி அணி

விளக்கம்:

தன்மை அணியை தன்மை நவிற்கி அணி என்றும் கூறுவர், ஏனெனில் ஒரு பொருளின் இயல்பை உள்ளது உள்ளபடியே அழகுடன் கூறுவதே தன்மை நவிற்கி அணி அல்லது இயல்பு நவிற்கி அணி ஆகும்.

- தன்மை நவிற்கி அணி (இயல்பு நவிற்கி அணி): ஒரு பொருளின் குணத்தையோ, தொழிலையோ, இனத்தையோ அல்லது அதன் இயல்பையோ மிகைப்படுத்தாமல், இயற்கையாக, உள்ளது உள்ளபடியே கூறுவது இந்த அணியாகும்.
- பிற அணிகள்: தீவக அணி என்பது ஒரு சொல் பல இடங்களில் பொருளைத் தருவது; உவமை அணி என்பது உவமையும் உவமேயமும் வருவது; தற்குறிப்பேற்ற அணி என்பது புலவர் தன் குறிப்பை ஏற்றிக் கூறுவது

3. பிரெஞ்சு மொழியில் வந்த “காந்தி வாழ்க்கை வரலாற்றின்” தமிழாக்க நூல் எது?

அ) உண்மை சுடும்

ஆ) ஒரு கதாசிரியரின் கதை

இ) வாழ்விக்க வந்த காந்தி

ஈ) தேவன் வருவார்

விடை : ஆ) ஒரு கதாசிரியரின் கதை

விளக்கம்:

பிரெஞ்சு மொழியில் வந்த காந்தியின் வாழ்க்கை வரலாற்றின் தமிழாக்கம் “ வாழ்விக்க வந்த காந்தி” என்ற நூலாகும், இது ஜெயகாந்தனால் மொழிபெயர்க்கப்பட்டது.

- சரியான விடை: இ) வாழ்விக்க வந்த காந்தி.
- விளக்கம்: இது ஜெயகாந்தனின் படைப்புகளில் ஒன்றாகும், பிரெஞ்சு மொழியில் வெளிவந்த காந்தி வாழ்க்கை வரலாற்றை அவர் தமிழில் மொழிபெயர்த்துள்ளார்.

4. வெண்பாவில் அமைந்த நூல்கள்

- அ) குறள்; நாலடியார்
 - ஆ) நாலடியார்; மணிமேகலை
 - இ) குறள்; சிலம்பு
 - ஈ) குறள், வளையாபதி
- விடை : அ) குறள்; நாலடியார்

விளக்கம்:

திருக்குறள் மற்றும் நாலடியார் ஆகிய இரண்டும் வெண்பா யாப்பில் அமைந்த முக்கிய நூல்கள் ஆகும்; திருக்குறள் குறள் வெண்பா வகையைச் சார்ந்தது, நாலடியார் 400 வெண்பாக்களால் ஆனது.

- திருக்குறள்: 1330 குறட்பாக்கள் அனைத்தும் வெண்பா வடிவம் (குறள் வெண்பா) கொண்டவை.
- நாலடியார்: 400 வெண்பாக்களைக் கொண்ட நீதி நூல்.

மற்றவை:

- சிலப்பதிகாரம், மணிமேகலை: ஆசிரியப்பாவில் அமைந்தவை.
- வளையாபதி: ஐஞ்சிறுகாப்பியங்களில் ஒன்று, இது வெண்பா மட்டுமன்றிப் பல பாவகைகளில் அமைந்தது, ஆனால் பெரும்பாலும் ஆசிரியப்பாவிலேயே இருக்கும்.

5. ஒருவன் இருக்கிறான் கதை வெளியான இதழ்

- அ) கலைமகள்
 - ஆ) கணையாழி
 - இ) குமுதம்
 - ஈ) ஆனந்தவிகடன்
- விடை : அ) கலைமகள்
- விளக்கம்:

ஒருவன் இருக்கிறான் கதை கலைமகள் இதழில் வெளியானது.

கு.அழகிரிசாமியின் இந்த சிறுகதை 1966ஆம் ஆண்டு கலைமகள் இதழில் வெளியானது.

6. காலக் கணிதம் கவிதையில் இடம்பெற்ற தொடர்

- அ) இகழ்ந்தால் என் மனம் இறந்து விடாது.
 - ஆ) என்மனம் இகழ்ந்தால் இறந்துவிடாது.
 - இ) இகழ்ந்தால் இறந்துவிடாது என் மனம்.
 - ஈ) என்மனம் இறந்துவிடாது இகழ்ந்தால்.
- விடை : அ) இகழ்ந்தால் என் மனம் இறந்து விடாது.
- விளக்கம்:

'காலக்கணிதம்' கவிதையில் இடம்பெற்ற சரியான தொடர், கண்ணதாசன் எழுதிய வரிகளின்படி, இகழ்ந்தால் என் மனம் இறந்து விடாது என்பதே சரியான விடையாகும். கவிதையில் "இகழ்ந்தால் என்மனம் இறந்து விடாது!" என்ற வரி இடம்பெற்றுள்ளது.

7. கண்ணதாசன் முதன் முதலில் திரைப்படத்திற்குப் பாடல் எழுதிய ஆண்டு.....

- அ) 1939
 - ஆ) 1942
 - இ) 1949
 - ஈ) 1950
- விடை : இ) 1949
- விளக்கம்:

கண்ணதாசன் முதன்முதலில் திரைப்படத்திற்குப் பாடல் எழுதிய ஆண்டு 1949, கன்னியின் காதலி என்ற திரைப்படத்தில் "கலங்காதிரு மனமே" என்ற பாடலுடன் அறிமுகமானார். திரைப்படம்: கன்னியின் காதலி. முதல் பாடல்: கலங்காதிரு மனமே

8. பொருத்துக.

1. கரையான் – அ) கட்டெறும்பு
2. காலக்கழுதை – ஆ) வந்தொட்டும்
3. தெருப்புழுதி – இ) காற்றுடைக்கும்
4. சட்டம் – ஈ) மண்வீடு கட்டும்

அ) 1.ஆ 2.அ 3.ஈ 4.இ

ஆ) 1.ஈ 2.அ 3.ஆ 4.இ

இ) 1.ஆ 2.அ 3.இ 4.ஈ

ஈ) 1.அ 2.இ 3.ஆ 4.ஈ

விடை : ஆ) 1.ஈ 2.அ 3.ஆ 4.இ

விளக்கம்:

சரியான பொருத்தம்: 1-ஈ (கரையான் – மண்வீடு கட்டும்), 2-அ (காலக்கழுதை – கட்டெறும்பு), 3-ஆ (தெருப்புழுதி – வந்தொட்டும்), 4-இ (சட்டம் – காற்றுடைக்கும்); எனவே, சரியான விடை ஆ) 1.ஈ 2.அ 3.ஆ 4.இ ஆகும்.

- கரையான் (1): மரத்தாலான பொருட்களை உண்டு, மண்ணில் மண்வீடு கட்டும். (ஈ)
- காலக்கழுதை (2): இது ஒரு வகை எறும்பு (கட்டெறும்பு). (அ)
- தெருப்புழுதி (3): சாலையில் வரும்போது நம் மீது ஒட்டிக்கொள்ளும். (ஆ)
- சட்டம் (4): காற்று வேகமாக வீசும்போது உடைந்து போகும். (இ)

9. மேன்மை தரும் அறம் என்பது.....

அ) கைம்மாறு கருதாமல் அறம் செய்வது.

ஆ) மறுபிறப்பில் பயன் பெறலாம் என்ற நோக்கில் அறம் செய்வது.

இ) புகழ் கருதி அறம் செய்வது.

ஈ) பதிலுதவி பெறுவதற்காக அறம் செய்வது

விடை : அ) கைம்மாறு கருதாமல் அறம் செய்வது.

விளக்கம்:

மேன்மை தரும் அறம் என்பது கைம்மாறு கருதாமல் அறம் செய்வது ஆகும், அதாவது எந்தப் பிரதிபலனையும் எதிர்பார்க்காமல், தன்னலமின்றி செய்யப்படும் அறமே உயர்ந்த அறம் என்று கருதப்படுகிறது.

- சரியான விடை: அ) கைம்மாறு கருதாமல் அறம் செய்வது.
- விளக்கம்: 'இம்மைச் செய்தது மறுமைக்கு ஆம்' என எண்ணிச் செய்யும் அறம், 'அறவிலை வணிகன்' எனப்படுவது, மேன்மை தரும் அறம் அல்ல. மாறாக, எந்த எதிர்பார்ப்பும் இன்றி, உள்ளார்ந்த தூண்டுதலால் செய்யப்படும் அறமே மேன்மையானது.

10. இரப்போர்க்கு ஈயாது வாழ்வதை விட உயிர் துறப்பது மேலானது' என்று கூறும்

அகநூல்.....

அ) கலித்தொகை

ஆ) குறுந்தொகை

இ) ஐங்குறுநூறு

ஈ) பரிபாடல்.

விடை : அ) கலித்தொகை

விளக்கம்:

“இரப்போர்க்கு ஈயாது வாழ்வதை விட உயிர் துறப்பது மேலானது” என்று கூறும் அகநூல் அ) கலித்தொகை ஆகும், இது கபிலரால் பாடப்பட்ட பாலைக் கலிப் பாடல்களில்

இடம்பெற்றுள்ளது. இது இரப்போர்க்கு (இரப்பவர்களுக்கு) ஈயாமல் (கொடுக்காமல்) வாழ்வதை விட இறப்பது மேல் என்ற கருத்தை வலியுறுத்துகிறது.

- இந்தக் கூற்று கலித்தொகையின் பாலைக்கலிப் பாடல்களில் இடம்பெற்றுள்ளது.
- இப்பாடல்கள் இரப்பவர்களுக்குக் கொடுத்து உதவ வேண்டும், இல்லையெனில் உயிர் துறப்பதே மேல் என்ற உயர்ந்த பண்பைக் குறிக்கின்றன.
- கலித்தொகையில் உள்ள பாலைக்கலிப் பாடல்கள் கபிலரால் பாடப்பட்டவை

11. வள்ளலின் பொருள், இரவலனின் பொருள்' – என்றவர்

அ) நக்கீரர்

ஆ) கபிலர்

இ) பெரும்பதுமனார்

ஈ) நல்வேட்டனார்

விடை : இ) பெரும்பதுமனார்

விளக்கம்:

"வள்ளலின் பொருள், இரவலனின் பொருள்" என்று கூறியவர் பெரும்பதுமனார் ஆவார், ஏனெனில் அவர் பிறருடைய துன்பத்தைத் தன் துன்பமாகக் கருதி உதவி செய்வதே உண்மையான வள்ளல் தன்மை என்று குறிப்பிடுகிறார்.

- சரியான விடை: இ) பெரும்பதுமனார்.
- விளக்கம்: பெரும்பதுமனார், வள்ளலின் பொருள் (செல்வத்தின் இருப்பு) இரவலனின் பொருளுக்குச் சமம் என்றும், வள்ளலின் வறுமை இரவலனின் வறுமையைப் போன்றது என்றும் கூறுவதன் மூலம், வள்ளல்கள் இரவலர்களின் துன்பத்தைப் புரிந்துகொண்டு உதவுவதைச் சுட்டிக்காட்டுகிறார்.

12. சேர அரசர்களின் கொடைப் பதிவாக திகழும் நூல்

அ) புறநானூறு

ஆ) பரிபாடல்

இ) பதிற்றுப்பத்து

ஈ) சிலப்பதிகாரம்

விடை : இ) பதிற்றுப்பத்து

விளக்கம்:

சேர அரசர்களின் கொடைப் பதிவாகத் திகழும் நூல் பதிற்றுப்பத்து ஆகும், இது சேர மன்னர்களின் வீரம், கொடை, போர் வெற்றிகள் போன்றவற்றை விரிவாகப் பேசுகிறது.

- பதிற்றுப்பத்து: சேர மன்னர்களின் கொடை, வீரம், புகழ் பற்றிப் பாடும் பத்துப்பாட்டு நூல்களில் ஒன்று; சேரர் வரலாறு, கொடைச் செய்திகளுக்கு இதுவே முக்கிய ஆதாரம்.
- புறநானூறு: சேர, சோழ, பாண்டிய மற்றும் பிற வேளிர் மன்னர்களின் கொடைகள் பற்றிப் பாடும்; ஆனால் சேரர் கொடைக்கென தனி நூல் பதிற்றுப்பத்து.
- பரிபாடல்: காதல், தெய்வம், இயற்கை பற்றிய பாடல்களைக் கொண்டது.
- சிலப்பதிகாரம்: காப்பிய நூல், வணிகம், அரசியல், நீதி பற்றிப் பேசுகிறது.

13. பொருத்துக.

அ) நக்கீரர் – 1. ஆடு கோட்பாட்டுச் சேரலாதன்

ஆ) ஒளவையார் – 2. பெருஞ்சாத்தன்

இ) கபிலர் – 3. அதியன்

ஈ) நச்செள்ளையார் – 4. திருமுடிக்காரி

அ) 4, 3, 2, 1

ஆ) 3, 2, 1, 4

இ) 2, 3, 4, 1

ஈ) 2, 4, 3, 1

விடை : இ) 2, 3, 4, 1

விளக்கம்:

நக்கீரர் பெருஞ்சாத்தன், ஓளவையார் அதியன், கபிலர் திருமுடிக்காரி, நச்செள்ளையார் ஆடுகோட்பாட்டுச் சேரலாதன் ஆகியோருடன் பொருந்துவார்கள், ஏனெனில் நச்செள்ளையார் பதிற்றுப்பத்து 6-ஆம் பத்தைப் பாடிய புலவர், கபிலர் அதியனுடனும் திருமுடிக்காரியுடனும் தொடர்பு கொண்டவர், ஓளவையார் அதியனைப் பாடியுள்ளார், நக்கீரர் பெருஞ்சாத்தனுடன் தொடர்புள்ளவர்.

- அ) நக்கீரர் – 2. பெருஞ்சாத்தன் (நக்கீரர் பெருஞ்சாத்தனைப் பாடியுள்ளார்).
 - ஆ) ஓளவையார் – 3. அதியன் (ஓளவையார் அதியமானைப் பாடினார்).
 - இ) கபிலர் – 4. திருமுடிக்காரி (கபிலர் திருமுடிக்காரியைப் பாடியுள்ளார்).
 - ஈ) நச்செள்ளையார் – 1. ஆடுகோட்பாட்டுச் சேரலாதன் (காக்கைப்பாடினியார் நச்செள்ளையார் பதிற்றுப்பத்து 6-ஆம் பத்தைப் பாடினார்).
- எனவே, சரியான பொருத்தம்: அ-2, ஆ-3, இ-4, ஈ-1.

14. பொருத்துக.

1. செவிலித்தாய் – அ) பொருள் பொதிந்து கிடக்கின்றது.
2. புலவர் பாட்டு – ஆ) தெருவில் ஆடிப்பாடுபவர்.
3. இசைப்பாணர் – இ) பிறழ்ந்து செல்கின்றன.
4. குளத்து மீன்கள் – ஈ) சினங்காட்டுவார்.

அ) 1.ஆ 2.அ 3.ஈ 4.இ

ஆ) 1.ஈ 2.அ 3.ஆ 4.இ

இ) 1.ஆ 2.அ 3.இ 4.ஈ

ஈ) 1.அ 2.இ 3.ஆ 4.ஈ

விடை : ஆ) 1.ஈ 2.அ 3.ஆ 4.இ

விளக்கம்:

செவிலித்தாய் – சினங்காட்டுவார், புலவர் பாட்டு – பொருள் பொதிந்து கிடக்கின்றது, இசைப்பாணர் – தெருவில் ஆடிப்பாடுபவர், குளத்து மீன்கள் – பிறழ்ந்து செல்கின்றன என்று பொருந்துகின்றன.

- 1. செவிலித்தாய் – ஈ) சினங்காட்டுவார்: செவிலித்தாய் குழந்தைக்குப் பாலூட்டி வளர்ப்பவள், கோபப்படுபவள் (சினங்காட்டுவார்).
- 2. புலவர் பாட்டு – அ) பொருள் பொதிந்து கிடக்கின்றது: புலவர்களின் பாடல்களில் ஆழமான பொருள்கள் நிறைந்து காணப்படும்.
- 3. இசைப்பாணர் – ஆ) தெருவில் ஆடிப்பாடுபவர்: இசைக்கருவிகளை வாசித்து தெருக்களில் பாடி ஆடுபவர்கள்.
- 4. குளத்து மீன்கள் – இ) பிறழ்ந்து செல்கின்றன: குளத்தில் உள்ள மீன்கள் நீருக்குள் நீந்திச் செல்வது.

15. படுகர் இனமக்களின் வாழ்வியல் மாற்றத்தைப் பேசும் புதினம்

அ) கரிப்புமணிகள்

ஆ) வேருக்குநீர்

இ) சேற்று மனிதர்கள்

ஈ) குறிஞ்சித்தேன்

விடை : ஈ) குறிஞ்சித்தேன்

விளக்கம்:

படுகர் இன மக்களின் வாழ்வியல் மாற்றத்தைப் பேசும் புதினம் குறிஞ்சித்தேன் ஆகும். இந்த நாவல், சமூக மாற்றங்களின் பின்னணியில் இயற்கை வாழ்வு மற்றும் மனித உணர்வுகளை, குறிப்பாக படுகர் இன மக்களின் மூன்று தலைமுறைகளின் வாழ்க்கை மாற்றங்களைச் சித்தரிக்கிறது.

- குறிஞ்சித்தேன்: நாவல் ஆசிரியர் ப. சிங்காரத்தின் படைப்பு, இது குறிஞ்சி நில மக்களின் வாழ்வையும், சமூக மாறுதல்களையும் மையமாகக் கொண்டது.

16.1954-ல் தாமரையணி விருது பெற்றவர்

அ) சின்னப்பிள்ளை

ஆ) பாலசரசுவதி

இ) எம். எஸ். சுப்புலட்சுமி

ஈ) ராஜம் கிருஷ்ணன்

விடை : இ) எம். எஸ். சுப்புலட்சுமி

விளக்கம்:

எம். எஸ். சுப்புலட்சுமி அவர்கள் 1954 ஆம் ஆண்டு தாமரை அணி விருது (பத்ம பூஷன்) பெற்றார். அவர் "இசைப்பேரரசி" என்று நேருவால் அழைக்கப்பட்டவர்

17. 'கடுகி செல்' – இதில் 'கடுகி' என்பதன் பொருள்

அ) செல்லுதல்

ஆ) மெதுவாக

இ) விரைந்து

ஈ) இயல்பாக

விடை : இ) விரைந்து

விளக்கம்:

கடுகி செல்' என்பதில் 'கடுகி' என்பதன் பொருள் விரைந்து (வேகமாக) ஆகும், இது வேகமாகச் செல்வதைக் குறிக்கிறது.

- கடுகி செல்: வேகமாகச் செல்.
- கடுகி செல்: வேகமாகச் செல்.
- இயல்பாக: சாதாரணமாக.

18. "முன்னும் நினைவால் முடிதாழ வாழ்த்துவமே"- என்று பாடியவர்

அ) பெருஞ்சித்திரனார்

ஆ) க. சச்சிதானந்தன்

இ) வாணிதாசன்

ஈ) கண்ண தாசன்

விடை : அ) பெருஞ்சித்திரனார்

விளக்கம்:

"முன்னும் நினைவால் முடிதாழ வாழ்த்துவமே" என்று பாடியவர் பெருஞ்சித்திரனார் ஆவார், இந்தப் பாடல் வரிகள் அவரது புகழ்பெற்ற கனிச் சாறு நூலில் இடம்பெற்றுள்ள 'அன்னை மொழியே' என்ற பாடலில் இருந்து எடுக்கப்பட்டவை.

- சரியான விடை: அ) பெருஞ்சித்திரனார்.
- விளக்கம்: இந்த வரிகள், தமிழைப் போற்றி வணங்குவதைக் குறிக்கின்றன. பெருஞ்சித்திரனார், தமிழ் மொழியின் பெருமையைப் போற்றிப் பாடியுள்ளார்.

19. செந்தமிழ் – பிரித்து எழுதுக.

அ) செந் + தமிழ்

ஆ) செம் + தமிழ்

இ) செ + தமிழ்

ஈ) செம்மை + தமிழ்

விடை : ஈ) செம்மை + தமிழ்

விளக்கம்:

'செந்தமிழ்' என்ற சொல்லைப் பிரித்து எழுதும்போது செந் + தமிழ் அல்லது செம்மை + தமிழ் (சூழலைப் பொறுத்து) வரும். இருப்பினும், பொதுவாகப் செம்மை + தமிழ் என்பதே

சரியான பிரித்தல் எனக் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது, இது 'செம்மையான தமிழ்' அல்லது 'தூய தமிழ்' என்ற பொருளைத் தரும்.

'செம்மை' என்பது தூய்மை, சிறப்பு, அழகு ஆகியவற்றைக் குறிக்கும். எனவே, 'செம்மையான தமிழ்' என்பதே 'செந்தமிழ்' என்பதன் நேரடிப் பொருள். சில இடங்களில் 'செந் + தமிழ்' (செந்நிறம் போன்ற தமிழ்) எனவும் பிரிக்கப்பட்டிருந்தாலும், பெரும்பாலும் இலக்கியப் பொருளில் 'செம்மை + தமிழ்' என்பதே ஏற்கப்படுகிறது.

20. பொருத்துக.

1. நடத்தல் – அ) எதிர்மறைத் தொழிற்பெயர்
2. கொல்லாமை – ஆ) வினையாலணையும் பெயர்
3. கேடு – இ) தொழிற்பெயர்
4. வந்தவர் – ஈ) முதனிலைத் திரிந்த தொழிற்பெயர்

அ) 1.ஆ 2.அ 3.ஈ 4.இ

ஆ) 1.இ 2.அ 3.ஈ 4.ஆ

இ) 1.இ 2.ஆ 3.ஈ 4.அ

ஈ) 1.இ 2.அ 3.ஆ 4.ஈ

விடை : ஆ) 1.இ 2.அ 3.ஈ 4.ஆ

விளக்கம்:

சரியான விடை (ஆ) 1.இ 2.அ 3.ஈ 4.ஆ. அதாவது, 'நடத்தல்' என்பது தொழிற்பெயர் (இ), 'கொல்லாமை' என்பது எதிர்மறைத் தொழிற்பெயர் (அ), 'கேடு' என்பது முதனிலைத் திரிந்த தொழிற்பெயர் (ஈ), 'வந்தவர்' என்பது வினையாலணையும் பெயர் (ஆ) ஆகும்.

இவை எவ்வாறு பொருந்துகின்றன என்பதற்கான விளக்கம்:

- 1. நடத்தல் – (இ) தொழிற்பெயர்: 'நட' என்ற வினைச்சொல்லிலிருந்து 'நடத்தல்' என்ற செயல் பெயர் உருவாகிறது.
- 2. கொல்லாமை – (அ) எதிர்மறைத் தொழிற்பெயர்: 'கொல்' + 'லா' + 'மை' இணைந்து 'கொல்லாமை' (கொல்லுதல் அல்ல) என்ற எதிர்மறைப் பொருளைத் தரும் தொழிற்பெயராகிறது.
- 3. கேடு – (ஈ) முதனிலைத் திரிந்த தொழிற்பெயர்: 'கேடு' என்பது 'கேடு' (அழித்தல்) என்ற பொருளில் வரும். ஆனால் 'கேடு' என்பது 'கேடு' (அழி) என்ற வினைச்சொல்லின் முதனிலையில் திரிந்து (கேடு - கேடு) வருவது. (சில சமயங்களில் 'கேடு' என்பது தொழிற்பெயராகவும் வரும், ஆனால் கொடுக்கப்பட்ட விருப்பங்களில் 'கேடு' என்பது முதனிலைத் திரிந்த தொழிற்பெயராகவே பொருந்துகிறது).
- 4. வந்தவர் – (ஆ) வினையாலணையும் பெயர்: 'வந்தவர்' என்பது 'வந்த + அவர்' (வந்தவர் - வந்தவர்கள்) என, வினையைச் செய்தவரைக் குறிக்கும் பெயர்.

21. உறாஅர்க்கு, வரனசைஇ – அளபெடை வகை

அ) சொல்லிசை, இன்னிசை

ஆ) ஒற்றளபெடை, சொல்லிசை

இ) செய்யுளிசை, சொல்லிசை

ஈ) இன்னிசை, சொல்லிசை

விடை : இ) செய்யுளிசை, சொல்லிசை

விளக்கம்:

செய்யுளிசை, சொல்லிசை ஆகும்; ஏனெனில், 'உறாஅர்க்கு' என்பது செய்யுளில் ஓசையை நிறைவு செய்ய வரும் செய்யுளிசை அளபெடை (இசையை நிறைவு செய்ய) மற்றும் 'வரனசைஇ' என்பது ஒரு வினையெச்சம் (வர + அசை + இ) தன் வினையெச்சப் பொருளைத் தரும் பொருட்டு நீண்டு ஒலிக்கும் சொல்லிசை அளபெடை ஆகும்.

விளக்கம்:

- **உறாஅர்க்கு:** இது ஒரு பெயர்ச்சொல், செய்யுளின் ஓசை குறையும்போது அதை நிறைவு செய்ய 'ஆ'காரம் நீண்டு வருகிறது. இது செய்யுளின் அளபெடை (ஓசை நிறை அளபெடை) எனப்படும்.
- **வரனசைஇ:** 'வர' என்ற வினையெச்சம் 'இ'காரம் பெற்று 'வரனசைஇ' என ஒலிப்பதன் மூலம், வினையெச்சப் பொருள் நிலைபெறுகிறது. இது சொல்லிசை அளபெடை எனப்படும் (விசையை இசையாக்கி ஒலிப்பது).

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சொற்கள் முறையே செய்யுளின் மற்றும் சொல்லிசை அளபெடைகளைக் குறிக்கின்றன.

22. தொழிலைச் செய்யும் கருத்தாவைக் குறிப்பது

- அ) தொழிற்பெயர்
 - ஆ) முதனிலை திரிந்த தொழிற்பெயர்
 - இ) முதனிலைத் தொழிற்பெயர்
 - ஈ) வினையாலணையும் பெயர்
- விடை :** ஈ) வினையாலணையும் பெயர்

விளக்கம்:

தொழிலைச் செய்யும் கருத்தாவைக் குறிப்பது வினையாலணையும் பெயர் ஆகும், ஏனெனில் இது தொழிலைச் செய்யும் நபரை (கருத்தாவைக்) குறிக்கிறது (எ.கா., 'வந்தவர்', 'செய்வோர்'), அதே சமயம் தொழிற்பெயர் தொழிலின் பெயரையும், முதனிலைத் தொழிற்பெயர் தொழிலின் கருத்தாவையும் (முதல் நிலை திரிந்து) குறிக்கும், ஆனால் வினையாலணையும் பெயரே செயலைச் செய்பவரைக் குறிக்கும் சிறப்புப் பெயர்.

விளக்கம்:

- **தொழிற்பெயர்:** 'நடத்தல்', 'படித்தல்' போன்ற தொழிலின் பொதுவான பெயரைக் குறிக்கும் (விசுதி பெறும்).
- **முதனிலைத் தொழிற்பெயர்:** 'பறத்தல்' (பற) போன்ற விசுதி பெறாமல், முதல் எழுத்து மட்டும் திரிந்து தொழிலின் கருத்தாவைக் குறிக்கும் (எ.கா., 'ஓட்டம்' (ஓடு)).
- **முதனிலை திரிந்த தொழிற்பெயர்:** 'ஊறு' (ஊறுதல்), 'சூடு' (சூடு) போல முதல் எழுத்து திரிந்து தொழிலைக் குறிக்கும் (எ.கா., 'பேறு' (பெறு)).
- **வினையாலணையும் பெயர்:** 'வந்தவர்', 'செய்வோர்' போல ஒரு செயலைச் செய்பவரைக் குறிக்கும் பெயர் (எ.கா., 'கேட்டவர்', 'படித்தவன்').

எனவே, கேள்வி தொழிலைச் செய்யும் கருத்தாவைக் கேட்பதால், சரியான விடை வினையாலணையும் பெயர்.

23. 'பெரிய மீசை' சிரித்தார் – வண்ணச் சொல்லுக்கான தொகையின் வகை எது?

- அ) பண்புத்தொகை
 - ஆ) உவமைத்தொகை
 - இ) அன்மொழித்தொகை
 - ஈ) உம்மைத்தொகை
- விடை :** அ) பண்புத்தொகை

விளக்கம்:

'பெரிய மீசை' சிரித்தார் - இந்த தொடரில் உள்ள 'பெரிய' என்ற வண்ணச் சொல்லுக்குரிய தொகை (அ) பண்புத்தொகை ஆகும், ஏனெனில் அது 'மீசை' என்ற பெயர்ச்சொல்லின் பண்பை (பெரிய என்ற அளவு) விளக்குகிறது; இது பெயரெச்சத் தொடரில் பண்புப்பெயராய் வருவதால் பண்புத்தொகை எனப்படும்.

விளக்கம்:

- **பண்புத்தொகை:** பண்புப்பெயரானது (பெரிய) பெயர்ச்சொல்லின் (மீசை) தன்மையைக் குறிக்கும்போது பண்புத்தொகை எனப்படும். அதாவது, பெரிய + மீசை = பெரிய மீசை (பெரியதாகிய மீசை) என்று விரியும்.

- **உவமைத்தொகை:** உவம உருபு மறைந்திருக்கும். (எ.கா: மலர் போன்ற முகம்).
- **அன்மொழித்தொகை:** தொகைநிலைத் தொடரின் பொருள்படும்; ஆனால் உருபு வெளிப்படையாகத் தோன்றாது.
- **உம்மைத்தொகை:** 'உம்' என்னும் இடைச்சொல் மறைந்திருக்கும் (எ.கா: அண்ணனும் தம்பியும்).

எனவே, சரியான விடை (அ) பண்புத்தொகை.

24.கீழ்க்காணும் சொற்களில் உம்மைத்தொகை அல்லாத சொல் எது?

- அ) தேர்ப்பாகன்
- ஆ) அண்ணன் தம்பி
- இ) வெற்றிலை பாக்கு
- ஈ) இரவு பகல்

விடை : அ) தேர்ப்பாகன்

விளக்கம்:

கொடுக்கப்பட்ட சொற்களில் அ) தேர்ப்பாகன் என்பது உம்மைத்தொகை அல்லாத சொல்; மற்றவை (அண்ணன் தம்பி, வெற்றிலை பாக்கு, இரவு பகல்) உம்மைத்தொகைகள், ஏனெனில் அவை 'உம்' உருபு மறைந்து 'அண்ணனும் தம்பியும்', 'வெற்றிலையும் பாக்கும்', 'இரவும் பகலும்' என விரிந்து வரும்.

விளக்கம்:

- **உம்மைத்தொகை** என்பது 'உம்' என்னும் இடைச்சொல் மறைந்து வரும் தொகைநிலைத் தொடர்.
- **அ) தேர்ப்பாகன்:** இது 'தேரினை ஓட்டும் பாகன்' எனப் பொருள்படும், இது இரண்டாம் வேற்றுமை உருபும் பயனும் தொக்க தொகை (வேற்றுமைத்தொகை) ஆகும், உம்மைத்தொகை அல்ல.
- **ஆ) அண்ணன் தம்பி:** அண்ணனும் தம்பியும் (இருபெயரோட்டுப் பண்புத்தொகை, உம்மைத்தொகை).
- **இ) வெற்றிலை பாக்கு:** வெற்றிலையும் பாக்கும் (உம்மைத்தொகை).
- **ஈ) இரவு பகல்:** இரவும் பகலும் (உம்மைத்தொகை).

25.பண்புத்தொகை அல்லாத ஒன்று

- அ) செங்காந்தள்
- ஆ) வட்டத்தொட்டி
- இ) இன்மொழி
- ஈ) கொல்களிறு

விடை : ஈ) கொல்களிறு

விளக்கம்:

கொடுக்கப்பட்டவற்றில் ஈ) கொல்களிறு என்பது பண்புத்தொகை அல்லாதது; அது ஒரு வினைத்தொகை ஆகும் (கொல்லும் களிறு). செங்காந்தள், வட்டத்தொட்டி, இன்மொழி ஆகியவை பண்புத்தொகைகளே (நிறம், வடிவம், பண்பு).

- **செங்காந்தள்:** பண்புத்தொகை (நிறப் பெயர் + பண்புப் பெயர்)
- **வட்டத்தொட்டி:** பண்புத்தொகை (வடிவப் பெயர் + பண்புப் பெயர்)
- **இன்மொழி:** பண்புத்தொகை (இனிய + மொழி)
- **கொல்களிறு:** பண்புத்தொகை அல்ல. இது 'கொல்லும் களிறு' என வரும், இறந்தகாலப் பெயரெச்சம் (வினைத்தொகை)

26.காலம் கரந்த பெயரெச்சம்

- அ) வினைத்தொகை
- ஆ) பண்புத்தொகை
- இ) உவமைத்தொகை
- ஈ) உம்மைத்தொகை

விடை : அ) வினைத்தொகை
விளக்கம்:

காலம் கரந்த பெயரெச்சம் என்பது முக்காலத்தையும் (இறந்த, நிகழ்கால, எதிர் காலத்தை) உணர்த்தும் பெயரெச்சத் தொடராகும், இதுவே வினைத்தொகை எனப்படுகிறது (எ.கா: வீசு தென்றல் - வீசிய/வீசுகின்ற/வீசும் தென்றல்).

- **வினைத்தொகை (அ):** காலம் கரந்த பெயரெச்சம் (மறைந்த காலப் பெயரெச்சம்) என்பது வினைத்தொகையைக் குறிக்கும். இதில் பெயரெச்சத்தின் கால இடைநிலைகள் மறைந்து நிற்கும். (எ.கா: வீசு தென்றல்).
- **பண்புத்தொகை (ஆ):** பண்புப் பெயருக்கும் (வெள்) பெயர்ச்சொல்லுக்கும் (யானை) இடையில் பண்பு உருபு மறைந்து வருவது. (எ.கா: வெண்யானை - வெள்ளை யானை).
- **உவமைத்தொகை (இ):** உவம உருபுகள் (போல, அன்ன) மறைந்து வருவது. (எ.கா: மலர்ப்பாதம் - மலர் போன்ற பாதம்).
- **உம்மைத்தொகை (ஈ):** உம் என்னும் இடைச்சொல் மறைந்து வருவது. (எ.கா: அண்ணன் தம்பி - அண்ணனும் தம்பியும்).

27. கோசல நாட்டில் கொடை இல்லாத காரணம் என்ன?

- அ) நல்ல உள்ளம் உடையவர்கள் இல்லாததால்
ஆ) ஊரில் விளைச்சல் இல்லாததால்
இ) அரசன் கொடுங்கோல் ஆட்சி புரிவதால்
ஈ) அங்கு வறுமை இல்லாததால்
விடை : ஈ) அங்கு வறுமை இல்லாததால்
விளக்கம்:

கோசல நாட்டில் மக்கள் அனைவரும் வளமான வாழ்வு வாழ்ந்ததால், யாருக்கும் எந்தத் தேவையும் இருக்கவில்லை. எனவே, அங்கு கொடை (தானம்) வழங்கும் அவசியம் ஏற்படவில்லை.

28. ஓர் உயிர் பல உடல்களில் ஊடுருவி உலாவுவது போல பாயும் நதியாகப் பாலகாண்டத்தில் குறிப்பிடப்படுவது

- அ) சரயு
ஆ) யமுனை
இ) பிரம்மபுத்திரா
ஈ) கங்கை
விடை : அ) சரயு
விளக்கம்:

ஓர் உயிர் பல உடல்களில் ஊடுருவி உலாவுவது போலப் பாயும் நதியாகச் சரயு ஆறு பாலகாண்டத்தில் குறிப்பிடப்படுகிறது. கம்பராமாயணத்தின் பாலகாண்டத்தில் உள்ள நாட்டுப்படலத்தில், சரயு ஆறு பல கிளைகளாகப் பிரிந்து பல இடங்களில் பாய்வதை, ஒரு ஆன்மா பல உடல்களில் ஊடுருவிச் செல்வது போலக் கவிஞர் உவமைப்படுத்துகிறார்.

29. குன்றேறி யானைப்போர் கண்டற்றால் தன்கைத்தொன் றுண்டாகச் செய்வான் வினை - இக்குறளில் பயின்று வரும் அணி.

- அ) உவமையணி
ஆ) உருவக அணி
இ) வேற்றுமை அணி
ஈ) பிறிது மொழிதல் அணி
விடை : அ) உவமையணி
விளக்கம்:

இக்குறளில் பயின்று வரும் அணி **உவமையணி** ஆகும், ஏனெனில் இது "குன்றேறி யானைப் போர் கண்டற்றால் " என்று ஒரு செயலை (தன் கைப்பொருளைக்கொண்டு வினை செய்தல்) வேறொரு

காட்சியுடன் ஒப்பிட்டுக் காட்டுகிறது, மேலும் 'அற்று' என்ற உவம உருபு ('போல') அமைந்துள்ளது, இது உவமையணியின் முக்கிய அடையாளம்.

- குறள்: "குன்றேறி யானைப்போர் கண்டற்றால் தன்கைத்தொன்று உண்டாகச் செய்வான் வினை".
- பொருள்: தன் கையில் பொருள் இருக்கும்போது ஒரு செயலைச் செய்வது, மலையின்மேல் ஏறி நின்று யானைப் போரைக் காண்பது போன்றது (ஆபத்து இல்லாமல், எளிதாக).
- அணி:
 - உவமையணி: இருவேறு பொருள்களை 'போல', 'அற்று', 'போன்ற' போன்ற உவம உருபுகளைக் கொண்டு ஒப்பிட்டுச் சொல்வது. இங்கு, "யானைப்போர் கண்டற்றால்" என்பது 'யானைப் போரைக் கண்டது போல' என்று ஒப்பிடுகிறது.
 - உவமை: "யானைப்போர் கண்டற்றால்" (மலை மேல் நின்று யானைப் போர் காண்பது).
 - உவமேயம்: "தன்கைத்தொன்று உண்டாகச் செய்வான் வினை" (தன் கைப்பொருளைக் கொண்டு ஒரு செயலைச் செய்வது).
 - உவம உருபு: 'அற்று' ('போல').

எனவே, சரியான விடை அ) உவமையணி.

30. விடாமுயற்சி, சிறந்த அறிவாற்றல்

இவ்விரண்டையும் இடைவிடாமல் பின்பற்றுவதின் குடி.....

அ) உயர்ந்து விளங்கும்

ஆ) தாழ்ந்து நிற்கும்

இ) வாடிப் போகும்

ஈ) காணாமல் நீங்கும்

விடை : அ) உயர்ந்து விளங்கும்

விளக்கம்:

சரியான விருப்பம் அ) உயர்ந்து விளங்கும்.

விளக்கம்

திருக்குறளின் 1022 ஆவது குறளின்படி, விடாமுயற்சியும் (ஆள்வினை), சிறந்த அறிவாற்றலும் (ஆன்ற அறிவு) கொண்ட ஒருவரின் குடி, இந்த இரண்டையும் இடைவிடாமல் பின்பற்றுவதன் மூலம் உயர்ந்து விளங்கும்.

Part B - Mathematics

Question Answer with Explanation

31. Consider the following congruences:

$$(1) \quad x \equiv 3 \pmod{4}$$

$$(2) \quad x \equiv 11 \pmod{8}$$

$$(3) \quad x \equiv 13 \pmod{16}$$

Then:

- A. (1) and (2) have a common solution, but (1) and (3) do not have a common solution
- B. All three congruences have a common solution
- C. (1) and (3) have a common solution, but (2) and (3) do not have a common solution
- D. Any two of the congruences have a common solution

Answer: (C)

Explanation:

We analyze the compatibility of the congruences. A congruence modulo a higher power of 2 automatically implies the corresponding congruence modulo a lower power of 2, provided it is consistent.

Check (1) and (2):

$$x \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow x = 4k + 3.$$

Check consistency with modulo 8:

Possible residues modulo 8 for numbers congruent to 3 (mod 4) are:

$$3, 7.$$

But the second congruence requires

$$x \equiv 11 \equiv 3 \pmod{8}.$$

Since 3 appears in the list, (1) and (2) are *consistent*.

Check (1) and (3):

$$x \equiv 13 \equiv 1 \pmod{4}.$$

But (1) requires

$$x \equiv 3 \pmod{4}.$$

Since $1 \not\equiv 3 \pmod{4}$, these two congruences are *inconsistent*. Thus, (1) and (3) cannot have a common solution.

Check (2) and (3):

$$x \equiv 13 \equiv 5 \pmod{8}.$$

But (2) requires

$$x \equiv 11 \equiv 3 \pmod{8}.$$

Since $5 \not\equiv 3 \pmod{8}$, these are also *inconsistent*.

Conclusion:

(1) and (2) have a common solution.

(1) and (3) do *not* have a common solution.

(2) and (3) do *not* have a common solution.

Thus, the correct option is (C).

32. Let $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$. Consider the following statements:

1. $(M, \cdot)$ is not a group
2. $(M, \cdot)$ is a group
3. $(M, +, \cdot)$ is a commutative ring with unity
4. $(M, +, \cdot)$ is a field

Then:

- A. (1) is true
- B. only (2) and (3) are true
- C. only (2) and (4) are true
- D. Each of (2), (3), and (4) is true

Answer: (A)

Explanation: Let

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

Let

$$m_1 = \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix}, \quad m_2 = \begin{bmatrix} y & y \\ y & y \end{bmatrix} \in M$$

(i)

$$m_1 m_2 = \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & y \\ y & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy & 2xy \\ 2xy & 2xy \end{bmatrix} \in M$$

$\Rightarrow M$ is closed under multiplication.

(ii) Multiplication is associative.

(iii)

$$\begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & y \\ y & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2xy & 2xy \\ 2xy & 2xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix}$$

$$y = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{identity } e = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(iv)

$$\begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & y \\ y & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2xy & 2xy \\ 2xy & 2xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$2xy = \frac{1}{2}, \quad xy = \frac{1}{4}, \quad y = \frac{1}{4x}$$

$\Rightarrow$ inverse of m_1 exists only if $x \neq 0$.

For $x = 0$, inverse $\notin (M, \cdot)$

$\Rightarrow (M, \cdot)$ is not a group.

33. Which of the following groups is simple?

- A. Klein four group
- B. Icosahedral group
- C. S_3
- D. Cyclic group of order 15

Answer: (B)

Explanation:

The "icosahedral group" usually means the rotational symmetry group of an icosahedron, which is isomorphic to the alternating group A_5 . It is a classical fact that A_5 is the smallest non-abelian simple group; in particular, it has no nontrivial proper normal subgroups. Hence, the icosahedral group is simple.

Check the other options:

- **Klein four group** V_4 : abelian of order 4. Every subgroup of an abelian group is normal, and V_4 has nontrivial proper subgroups, so it is not simple.
- **S_3** : of order 6. Its normal subgroup A_3 (of order 3) is proper and nontrivial, so S_3 is not simple.

- **Cyclic group of order 15:** a cyclic group of composite order has proper nontrivial subgroups (here of orders 3 and 5), and being abelian, those subgroups are normal, so it is not simple.

Therefore, the only simple group among the choices is the icosahedral group, i.e., option (B).

34. Which of the following is true?

- A. The ring of polynomials over a ring is an integral domain.
- B. The ring of $n \times n$ -matrices over a field is an integral domain.
- C. If in the ring $M_n(F)$ of $n \times n$ -matrices over a field F , A is a matrix such that $AB \neq 0$ for every $B(\neq 0) \in M_n(F)$, then A is invertible.
- D. If in the ring of polynomials over a ring R we have a polynomial $f(x)$ such that $f(\alpha) = 0$ for every $\alpha \in R$, then $f \equiv 0$ polynomial.

Answer: (C)

Explanation:

We examine each statement.

(A) The ring of polynomials over a ring is an integral domain.

False in general. If the coefficient ring R has zero divisors then $R[x]$ also has zero divisors (constants already provide a counterexample). For instance $R = \mathbb{Z}_6$ has $2 \cdot 3 = 0$ in R , so as constant polynomials 2 and 3 are nonzero in $R[x]$ while $2 \cdot 3 = 0$. Thus $R[x]$ need not be an integral domain (only true when R itself is an integral domain).

(B) The ring of $n \times n$ matrices over a field is an integral domain.

False for $n \geq 2$. $M_n(F)$ is noncommutative and contains zero divisors. Example for $n = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

are nonzero but $AB = 0$. Hence $M_n(F)$ is not an integral domain when $n \geq 2$.

(C) If in $M_n(F)$ a matrix A satisfies $AB \neq 0$ for every $B \neq 0$, then A is invertible.

True. View $M_n(F)$ as a finite-dimensional vector space over F . Consider the linear map

$$T_A : M_n(F) \rightarrow M_n(F), \quad T_A(B) = AB.$$

The hypothesis says $\ker T_A = \{0\}$, so T_A is injective. Since the domain is finite dimensional, injectivity implies surjectivity, so there exists $B \in M_n(F)$ with $AB = I$. Thus A has a left inverse; in matrix rings a left inverse is also a two-sided inverse, so A is invertible. (Equivalently: A represents an injective linear map $F^n \rightarrow F^n$, hence bijective.)

(D) If $f \in R[x]$ satisfies $f(\alpha) = 0$ for every $\alpha \in R$, then $f \equiv 0$.

False in general. Over finite fields (or rings) nonzero polynomials can vanish at every element. Example: over the finite field $\mathbb{F}_p$,

$$f(x) = x^p - x$$

is not the zero polynomial in $\mathbb{F}_p[x]$ but $f(\alpha) = 0$ for all $\alpha \in \mathbb{F}_p$. So the statement fails.

Therefore, only statement (C) is true.

35. Let $\mathbb{R}[X]$ be the polynomial ring in one indeterminate over the field of real numbers. Then in the quotient ring $\mathbb{R}[X]/(X^8 + 1)$, the number of maximal ideals is:

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

Answer: (D)

Explanation:

Maximal ideals of $\mathbb{R}[X]/(X^8 + 1)$ correspond to irreducible factors of $X^8 + 1$ over $\mathbb{R}$. A maximal ideal in $\mathbb{R}[X]$ is generated by an irreducible polynomial (linear or irreducible quadratic), and distinct irreducible factors produce distinct maximal ideals in the quotient.

The equation $X^8 + 1 = 0$ has no real roots, since $X^8 \geq 0$ for real X and $X^8 + 1 > 0$. Hence there are no linear real factors. Its eight complex roots are

$$e^{i\frac{(2k+1)\pi}{8}} \quad (k = 0, 1, \dots, 7),$$

which form four complex-conjugate pairs. Each conjugate pair gives one irreducible quadratic factor over $\mathbb{R}$. Therefore $X^8 + 1$ factors over $\mathbb{R}$ as a product of four distinct irreducible quadratics.

Consequently there are four distinct maximal ideals in $\mathbb{R}[X]$ containing $(X^8 + 1)$, i.e. the quotient ring $\mathbb{R}[X]/(X^8 + 1)$ has 4 maximal ideals.

36. Let p be an odd prime number and $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}] = \{a + b\sqrt{-p} \mid a, b \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}\}$. Then the ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$ is:
- A. Not a Euclidean domain, but is a PID (Principal Ideal Domain)
 - B. Not a PID, but is an UFD
 - C. Neither Euclidean domain, nor a PID, but is an UFD
 - D. Not an UFD

Answer: (D)

Explanation:

Note that $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ is a UFD iff $d \leq Z$.

$\Rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{-p}]$, (p is odd prime) is not a UFD.

And we know that

$$\text{Not UFD} \Rightarrow \text{Not PID} \Rightarrow \text{Not ED}$$

Hence option (D) is correct.

37. The degree of the splitting field of the polynomial $x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ is:

A. 3

B. 6

C. 5

D. 4

Answer: (B)

Explanation:

The polynomial $x^3 - 2$ has one real root $\alpha = \sqrt[3]{2}$ and two nonreal roots $\alpha\omega$ and $\alpha\omega^2$, where $\omega = e^{2\pi i/3}$ is a primitive cube root of unity. The splitting field over $\mathbb{Q}$ is $\mathbb{Q}(\alpha, \omega)$.

The irreducibility of $x^3 - 2$ over $\mathbb{Q}$ follows from Eisenstein's criterion at $p = 2$, so $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$. The element ω satisfies $x^2 + x + 1 = 0$, so $[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}] = 2$. Since $\omega \notin \mathbb{Q}(\alpha)$ (the latter is a real field while ω is nonreal), the compositum has degree

$$[\mathbb{Q}(\alpha, \omega) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] [\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}] = 3 \cdot 2 = 6.$$

Therefore, the degree of the splitting field of the polynomial $x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ is 6.

Hence option (B) is correct.

38. Let T be a linear operator on a finite-dimensional vector space V and let W be a subspace of V . Then:

A. $\dim W = \dim V = \dim VW$

B. Every basis of V/W can be constituted with only elements of W

C. $\dim V \geq \dim W + \dim V/W$

D. $\frac{W}{W \cap \ker T} \cong T(W)$

Answer: (C)

Explanation:

Option (A) is false because in general a subspace W of V need not have the same dimension as V , and VW has no standard meaning in this context.

Option (B) is false since a basis of the quotient space V/W must be formed using cosets $v + W$ with $v \notin W$. Hence one cannot construct such a basis using only elements from W .

Option (C) is true. For any finite-dimensional vector space V and a subspace W , the dimension formula

$$\dim(V) = \dim(W) + \dim(V/W)$$

always holds. Therefore $\dim V \geq \dim W + \dim(V/W)$ is correct.

Option (D) is false. The correct isomorphism is

$$\frac{W}{W \cap \ker T} \cong T(W),$$

but this requires T to be a linear map, not necessarily a linear operator on V , and the statement is not always valid without that context. Hence in the present setting the guaranteed true statement is option (C).

39. If the transformation $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is defined by $T(X) = X'AX$, where A is any $n \times n$ symmetric matrix, then $T(X + Y)$ is equal to:

- A. $T(X) + 2X'AY + T(Y)$
- B. $TX + T(Y)$
- C. $T(X) + X'AY + T(Y)$
- D. $T(X) + Y'AX + T(Y)$

Answer: (A)

Explanation:

The transformation is defined by

$$T(X) = X'AX,$$

where A is symmetric. Consider

$$T(X + Y) = (X + Y)'A(X + Y).$$

Expanding,

$$(X + Y)'A(X + Y) = X'AX + X'AY + Y'AX + Y'AY.$$

Since A is symmetric, we have $Y'AX = X'AY$. Therefore,

$$T(X + Y) = X'AX + 2X'AY + Y'AY = T(X) + 2X'AY + T(Y).$$

Thus the correct expression is

$$T(X + Y) = T(X) + 2X'AY + T(Y),$$

which corresponds to option (A).

40. Which of the following numbers *can* be written as the sum of two squares?

- A. 21
- B. 25
- C. 14
- D. 22

Answer: (B)

Explanation:

A number can be expressed as a sum of two squares if and only if every prime of the form $4k + 3$ appears with an even exponent in its prime factorization.

Check the options:

$21 = 3 \cdot 7$. Both primes are $4k + 3$ and appear to the first power (odd). So 21 is not a sum of two squares.

$25 = 5^2$. The prime factor 5 is of the form $4k + 1$, and $25 = 3^2 + 4^2$. Thus it is a sum of two squares.

$14 = 2 \cdot 7$. The prime $7 = 4k + 3$ appears to the first power, so 14 is not a sum of two squares.

$22 = 2 \cdot 11$. The prime $11 = 4k + 3$ appears once, so 22 is not a sum of two squares.

Hence only 25 can be expressed as a sum of two squares.

41. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)(n+2)\dots(n+n))^{1/n}}{n}$

- A. Is equal to $\frac{e}{4}$
- B. Is equal to $\frac{4}{e}$
- C. Is equal to e
- D. Does not exist

Answer: (B)

Explanation:

Consider the given limit:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)(n+2)\dots(n+n))^{1/n}}{n}.$$

Take logarithms:

$$\ln L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(n+k) - \ln n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{n+k}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n}\right).$$

This is a Riemann sum for $\int_0^1 \ln(1+x) dx$:

$$\ln L = \int_0^1 \ln(1+x) dx.$$

Compute the integral:

$$\int_0^1 \ln(1+x) dx = [(1+x) \ln(1+x) - (1+x)]_0^1 = [2 \ln 2 - 2] - [0 - 1] = 2 \ln 2 - 1.$$

Therefore

$$L = e^{2 \ln 2 - 1} = e^{-1} \cdot 4 = \frac{4}{e}.$$

Checking the options, the correct match is $\frac{4}{e}$.

(B) $\frac{4}{e}$

42. Let $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ on $[0, \infty)$. Consider the limit of (f_n) .

- A. $f_n \rightarrow 0$ pointwise and uniformly on $[0, \infty)$
- B. $f_n \rightarrow 0$ pointwise but not uniformly on $[0, \infty)$
- C. $f_n \rightarrow \frac{1}{x}$ pointwise for $x \neq 0$
- D. f_n does not converge

Answer: (A)

Explanation:

For each fixed $x \geq 0$, $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2} \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$, so $f_n \rightarrow 0$ pointwise.

$$f'_n(x) = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}, \quad f''_n(x) = -\frac{2nx(3-nx^2)}{(1+nx^2)^3}.$$

Setting $f'_n(x) = 0$ gives the critical point $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Evaluating the second derivative there yields

$$f''_n(1/\sqrt{n}) = -\frac{\sqrt{n}}{2} < 0,$$

so $x = 1/\sqrt{n}$ is a local (indeed global) maximum. Thus

$$\sup_{x \geq 0} f_n(x) = f_n(1/\sqrt{n}) = \frac{1}{2\sqrt{n}} \rightarrow 0,$$

hence $f_n \rightarrow 0$ pointwise and uniformly on $[0, \infty)$.

43. Consider the sequence $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, where

$$a_n = \left(3 + 5 \left(\frac{1}{2} \right)^n + (-1)^n \left(\frac{1}{4} + (-1)^n \frac{2}{n} \right) \right).$$

Then the interval $(\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n)$ is given by

- A. $(-2, 8)$

B. $(\frac{11}{4}, \frac{13}{4})$

C. $(3, 5)$

D. $(\frac{1}{4}, \frac{7}{4})$

Answer: (B)

Explanation:

The given sequence is

$$a_n = \left(3 + 5 \left(\frac{1}{2} \right)^n + (-1)^n \left(\frac{1}{4} + (-1)^n \frac{2}{n} \right) \right).$$

Let us analyze the behavior of each component as $n \rightarrow \infty$:

1. 3 is constant, so it contributes a fixed value.
2. $5(1/2)^n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$.
3. $(-1)^n(1/4) = \pm 1/4$, so the subsequential limits are $1/4$ and $-1/4$.
4. $(-1)^n \frac{2}{n} \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$.

Hence the $\limsup a_n$ is obtained by taking the largest combination:

$$\limsup a_n = 3 + 0 + \frac{1}{4} + 0 = \frac{13}{4}.$$

Similarly, $\liminf a_n$ is obtained by taking the smallest combination:

$$\liminf a_n = 3 + 0 - \frac{1}{4} + 0 = \frac{11}{4}.$$

Therefore, the interval is

$$\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \right) = \left(\frac{11}{4}, \frac{13}{4} \right).$$

(B) $\left(\frac{11}{4}, \frac{13}{4} \right)$

44. Let $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ be defined by

$$h(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Which of the following statements is true?

- A. h is continuous everywhere
- B. h is Riemann integrable and its integral is $\frac{1}{3}$
- C. h is bounded but not Riemann integrable

D. h is unbounded

Answer: (C)

Explanation:

1. Boundedness: For all $x \in [0, 1]$, $0 \leq h(x) \leq 1$, so h is bounded. Option (D) is false.
2. Continuity: At any rational $x_0 \neq 0$, nearby irrationals give $h(x) = 0$ while $h(x_0) = x_0^2 \neq 0$. At any irrational $x_0 \neq 0$, nearby rationals give $h(x) = x^2 \neq 0$. Thus, h is discontinuous at all points except $x = 0$. Option (A) is false.
3. Riemann integrability: A bounded function is Riemann integrable if the set of discontinuities has measure zero. Here, the set of discontinuities is $[0, 1] \setminus \{0\}$, which has measure 1. Hence, h is not Riemann integrable. Option (B) is false.

Therefore, the correct answer is (C): h is bounded but not Riemann integrable.

45. Suppose that A, B are two non-empty subsets of $\mathbb{R}$ and $C = A \cap B$. Which of the following conditions imply that C is empty?
- A. A and B are open and C is compact
 - B. A and B are open and C is closed
 - C. A and B are both dense in $\mathbb{R}$
 - D. A is open and B is compact

Answer: (A)

Explanation:

Assume $A, B \subset \mathbb{R}$ are nonempty and $C = A \cap B$.

(A) If A and B are open then C is open. If C is also compact and nonempty, then by the Heine–Borel theorem C must be closed and bounded. But a nonempty open subset of $\mathbb{R}$ contains some open interval (α, β) , and (α, β) is not compact (it is not closed). Hence no nonempty set can be both open and compact in $\mathbb{R}$. Therefore C must be empty. Thus (A) implies $C = \emptyset$.

(B) Take $A = B = \mathbb{R}$. Then A and B are open, $C = A \cap B = \mathbb{R}$ is closed, and C is not empty. So (B) does not force C to be empty.

(C) It is possible that two dense sets have empty intersection (for example $A = \mathbb{Q}$ and $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ are both dense and $A \cap B = \emptyset$), but it is also possible they intersect nontrivially (for example $A = B = \mathbb{Q}$). Thus (C) does not imply $C = \emptyset$.

(D) Let $A = \mathbb{R}$ (open) and $B = [0, 1]$ (compact). Then $C = [0, 1]$ is nonempty. Hence (D) does not imply $C = \emptyset$.

Conclusion: only option (A) guarantees C is empty.

46. Which of the following functions on $[0, 1]$ has unbounded variation?

- A. $f(x) = x^3$
- B. $f(x) = |x - 1/3|$

C. $f(x) = \sin(\pi x)$

D. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 \pi x)}{n}$

Answer:(D)

Explanation:

1. $f(x) = x^3$ is continuously differentiable on $[0, 1]$, so it has bounded variation.
2. $f(x) = |x - 1/3|$ is piecewise linear with a finite number of monotone pieces, so it has bounded variation.
3. $f(x) = \sin(\pi x)$ is continuously differentiable on $[0, 1]$, so it has bounded variation.
4. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 \pi x)}{n}$ is an example of a Fourier-type series whose oscillations become increasingly rapid. The total variation satisfies

$$V_0^1(f) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} n \pi = \infty.$$

Thus the variation is unbounded.

Therefore, the function in option (D) has unbounded variation on $[0, 1]$.

47. Which of the following functions is uniformly continuous on $\mathbb{R}$?

A. $f(x) = \tan^{-1}(x)$

B. $f(x) = x^2$

C. $f(x) = e^x$

D. $f(x) = \sin(x^2)$

Answer: (A)

Explanation:

A function f is uniformly continuous on $\mathbb{R}$ if for any $\epsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that $|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$ for all $x, y \in \mathbb{R}$.

1. $f(x) = \tan^{-1}(x)$ is uniformly continuous because it is continuous on $\mathbb{R}$ and its derivative

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

is bounded.

2. $f(x) = x^2$ is not uniformly continuous; the derivative $2x$ is unbounded as $|x| \rightarrow \infty$.
3. $f(x) = e^x$ is not uniformly continuous; small changes in x produce arbitrarily large changes in $f(x)$ for large x .
4. $f(x) = \sin(x^2)$ is not uniformly continuous; the function oscillates faster as $|x|$ increases.

Hence, the uniformly continuous function on $\mathbb{R}$ is $\tan^{-1}(x)$.

48. Let $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ be defined by

$$h(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Then h is:

- A. Riemann integrable with integral $\frac{1}{3}$
- B. Riemann integrable with integral 0
- C. Not Riemann integrable
- D. Unbounded on $[0, 1]$

Answer: (C)

Explanation:

Boundedness: The function $h(x)$ satisfies $0 \leq h(x) \leq 1$ for all $x \in [0, 1]$, so it is bounded.

Discontinuities: At any rational $x_0 \neq 0$, nearby irrationals give $h(x) = 0$ while $h(x_0) = x_0^2 \neq 0$. At any irrational x_0 , nearby rationals give $h(x) = x^2 \neq 0$. Therefore h is discontinuous at every point except $x = 0$.

Riemann integrability: A bounded function on $[0, 1]$ is Riemann integrable if and only if the set of discontinuities has measure zero. Here the discontinuity set is $[0, 1] \setminus \{0\}$, which has measure 1. Hence h is not Riemann integrable.

Lebesgue integrability: The function is Lebesgue integrable since it is bounded and measurable. Its Lebesgue integral is 0 because rationals have measure zero.

49. Find the directional derivative of

$$f(x, y) = x^2y + y^2$$

at the point $(1, 2)$ in the direction of the unit vector

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

- A. 6
- B. $\frac{9}{\sqrt{2}}$
- C. $\frac{6}{\sqrt{2}}$
- D. $\frac{7}{\sqrt{2}}$

Answer: (B)

Explanation:

Compute the gradient:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2y + y^2), \frac{\partial}{\partial y}(x^2y + y^2) \right) = (2xy, x^2 + 2y).$$

At $(1, 2)$:

$$\nabla f(1, 2) = (2 \cdot 1 \cdot 2, 1^2 + 2 \cdot 2) = (4, 5).$$

Directional derivative:

$$D_{\vec{u}}f(1, 2) = \nabla f(1, 2) \cdot \vec{u} = (4, 5) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{4+5}{\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}}.$$

Thus, the correct choice is (B).

50. Let

$$a_n = \frac{5n^2 - 2}{10n^2 + 7}.$$

Then the sequence (a_n) :

- A. Diverges to $+\infty$
- B. Convergent but not Cauchy
- C. Cauchy and convergent to $\frac{1}{2}$
- D. Oscillatory and divergent

Answer: (C)

Explanation:

Consider the limit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 2}{10n^2 + 7}.$$

Divide numerator and denominator by n^2 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{2}{n^2}}{10 + \frac{7}{n^2}} = \frac{5 - 0}{10 + 0} = \frac{1}{2}.$$

Hence the sequence (a_n) converges to $\frac{1}{2}$.

Since every convergent sequence in $\mathbb{R}$ is also a Cauchy sequence, (a_n) is Cauchy.

Correct Answer:(C)

51. Let $x = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$, $y = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$. Then:

- A. $x^2 + y^2 = 1$.
- B. $x^2 - y^2 = x - y$.
- C. $(xy)^2 = xy$.
- D. $x^3 = x$, $y^3 = y$.

Answer: (C)

Explanation:

Let $x = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ and $y = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$.

We can express x and y in terms of ω , where ω is a primitive cube root of unity:

$$x = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \omega, \quad y = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \omega^2.$$

Recall that

$$\omega^3 = 1, \quad \omega \neq 1, \quad 1 + \omega + \omega^2 = 0.$$

Now, let's verify each option:

For option (A):

$$x^2 + y^2 = \omega^2 + (\omega^2)^2 = \omega^2 + \omega^4.$$

Since $\omega^3 = 1$, we have $\omega^4 = \omega$. Thus

$$x^2 + y^2 = \omega^2 + \omega = -1 \neq 1,$$

so option (A) is incorrect.

For option (B):

$$x^2 - y^2 = \omega^2 - (\omega^2)^2 = \omega^2 - \omega^4 = \omega^2 - \omega,$$

while

$$x - y = \omega - \omega^2.$$

Clearly,

$$\omega^2 - \omega = -(\omega - \omega^2) \neq \omega - \omega^2,$$

so option (B) is incorrect.

For option (C):

$$xy = \omega \cdot \omega^2 = \omega^3 = 1,$$

and hence

$$(xy)^2 = 1^2 = 1 = xy.$$

Thus, $(xy)^2 = xy$, so option (C) is correct.

For option (D):

$$x^3 = \omega^3 = 1, \quad y^3 = (\omega^2)^3 = (\omega^3)^2 = 1^2 = 1.$$

But $x = \omega \neq 1$ and $y = \omega^2 \neq 1$. Therefore

$$x^3 = 1 \neq x, \quad y^3 = 1 \neq y,$$

so option (D) is incorrect.

Hence, the only correct relation among the options is

$$\boxed{(xy)^2 = xy}$$

52. Let $f(z) = \sin z$, $z \in \mathbb{C}$. Then $f(z)$:

A. is bounded in the complex plane.

- B. assumes all complex numbers.
- C. assumes all complex numbers except i .
- D. assumes all complex numbers except i and $-i$.

Answer: (B)

Explanation:

The function $f(z) = \sin z$ is an entire (holomorphic on all of $\mathbb{C}$) and nonconstant function. By Picard's Theorem, a nonconstant entire function is either surjective onto $\mathbb{C}$ or misses at most one point.

However, it is known that $\sin z$ actually takes *every* complex value. Indeed, for any $w \in \mathbb{C}$, the equation

$$\sin z = w$$

can be solved explicitly using the identity

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

which leads to solutions for all $w \in \mathbb{C}$.

Therefore, $\sin z$ is surjective onto the entire complex plane.

Thus the correct option is:

assumes all complex numbers.

53. Define $f : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ by $f(z) = \frac{1}{z}$. Then the power series expansion of $f(z)$ about $z = 1$ in the disc $\{z : |z - 1| < 1\}$ is:
- A. $1 - (z - 1) + (z - 1)^2 - (z - 1)^3 + \dots$
 - B. $1 + (z - 1) + (z - 1)^2 + (z - 1)^3 + \dots$
 - C. $1 - z + z^2 - z^3 + \dots$
 - D. $1 + z + z^2 + z^3 + \dots$

Answer: (A)

Explanation:

Let $w = z - 1$. For $|w| < 1$ we have

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1 + w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n = 1 - w + w^2 - w^3 + \dots.$$

Substituting back $w = z - 1$ gives

$$\frac{1}{z} = 1 - (z - 1) + (z - 1)^2 - (z - 1)^3 + \dots,$$

which converges for $|z - 1| < 1$.

54. For a complex number z , the inequality $|z - i| < |z + i|$ is:

- A. never true.
- B. always true.
- C. true if and only if $\text{Im}(z) > 0$.
- D. true if and only if $\text{Re}(z) > 0$.

Answer: (C)

Explanation:

Let $z = x + iy$. Then the inequality

$$|z - i| < |z + i|$$

compares the distance of the point z from the points i and $-i$ on the imaginary axis.

Compute each side:

$$|z - i|^2 = x^2 + (y - 1)^2, \quad |z + i|^2 = x^2 + (y + 1)^2.$$

So the inequality becomes

$$x^2 + (y - 1)^2 < x^2 + (y + 1)^2.$$

Cancel x^2 :

$$(y - 1)^2 < (y + 1)^2.$$

Expand:

$$y^2 - 2y + 1 < y^2 + 2y + 1.$$

Simplify:

$$-2y < 2y \implies y > 0.$$

Since $y = \text{Im}(z)$, the inequality holds exactly when

$$\text{Im}(z) > 0.$$

Thus the correct option is:

true if and only if $\text{Im}(z) > 0$.

55. Let f be an entire function such that $|f(z)| > M$ for some $M > 0$. Then which one of the following is true?

- A. f is an identity map.
- B. $f(z) = z^2$.
- C. f is a constant.

D. $f(z) = z^3$.

Answer: (C)

Explanation:

Suppose f is an entire function and

$$|f(z)| > M > 0 \quad \text{for all } z \in \mathbb{C}.$$

This means $f(z)$ never becomes zero anywhere in the complex plane.

Define a new function

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}.$$

Since $|f(z)| > M > 0$, the function g is well-defined and satisfies

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z)|} < \frac{1}{M}.$$

Hence g is a bounded entire function.

By Liouville's Theorem, a bounded entire function must be constant. Therefore,

$$g(z) = \text{constant} \quad \Rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{g(z)} = \text{constant}.$$

Thus the only correct statement is:

f is a constant.

56. The value of $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz$ is:

- A. $2\pi i$
- B. 0
- C. 2π
- D. $-2\pi i$

Answer: (B)

Explanation:

We can write the Taylor series for $\sin z$ about 0:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Hence

$$\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!},$$

which is entire (the apparent singularity at 0 is removable). Since the integrand is analytic on and inside $|z| = 1$, Cauchy's theorem gives

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz = 0.$$

(Equivalently, the residue at 0 is 0, so the contour integral vanishes.)

57. If $|e^z| = 1$ for a complex number $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, then which of the following is true?

- A. $x = n\pi$ for some integer n
- B. $y = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ for some integer n
- C. $y = n\pi$ for some integer n
- D. $x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ for some integer n

Answer: (B)

Explanation:

Given $|e^z| = 1$

$$\Rightarrow |e^{e^x(\cos y + i \sin y)}| = 1$$

$$\Rightarrow |e^{e^x \cos y} \cdot e^{ie^x \sin y}| = 1$$

$$\Rightarrow e^{e^x \cos y} = 1 \quad (\because |e^{ie^x \sin y}| = 1)$$

$$\Rightarrow e^x \cos y = 0$$

$$\Rightarrow \cos y = 0 \quad (\text{since } e^x \neq 0)$$

$$\Rightarrow y = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

Hence option (b) is correct.

58. Let $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ denote the upper half plane and let $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ be defined by $f(z) = e^{iz}$. Which one of the following statements is true?

- A. $f(\mathbb{H}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
- B. $f(\mathbb{H}) \cap \mathbb{H}$ is countable
- C. $f(\mathbb{H})$ is bounded
- D. $f(\mathbb{H})$ is a convex subset of $\mathbb{C}$

Answer: (C)

Explanation:

Given $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$. Let $z = x + iy$, where $x, y \in \mathbb{R}$. For $z \in \mathbb{H}$, we have $\text{Im}(z) = y > 0$.

Now

$$f(z) = e^{i(x+iy)} = e^{ix+i^2y} = e^{-y}e^{ix}$$

$$\Rightarrow |f(z)| = |e^{-y}e^{ix}| = |e^{-y}||e^{ix}|$$

Since e^{-y} is a positive real number, $|e^{-y}| = e^{-y}$. Also, $|e^{ix}| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1$. Thus,

$$|f(z)| = e^{-y} \cdot 1 = e^{-y}$$

Since $z \in \mathbb{H}$, we have $y > 0$. This implies $-y < 0$. Since e is increasing function, we have $e^{-y} < e^0 = 1$. So, for all $z \in \mathbb{H}$, we have:

$$|f(z)| < 1$$

This means the image $f(\mathbb{H})$ is contained within the open unit disk $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$. Thus, $f(\mathbb{H})$ is bounded, which is statement (c).

59. How many roots does the polynomial $z^{100} - 50z^{30} + 40z^{10} + 6z + 1$ have in the open disc $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$?
- A. 100
 - B. 50
 - C. 30
 - D. 0

Answer: (C)

Explanation:

Rouché's Theorem states that if $|g(z)| > |f(z)|$ on a simple closed contour C , then $f(z) + g(z)$ and $g(z)$ have the same number of zeros inside C .

Given $P(z) = z^{100} - 50z^{30} + 40z^{10} + 6z + 1$. We will use **Rouché's Theorem** on the boundary of the given open disc, which is the unit circle $C : |z| = 1$.

We split $P(z)$ into two functions, $f(z)$ and $g(z)$, where $|g(z)| > |f(z)|$ on the circle $|z| = 1$.

Let $g(z) = -50z^{30}$ and $f(z) = z^{100} + 40z^{10} + 6z + 1$. On the circle $|z| = 1$:

1. **Modulus of $g(z)$:**

$$|g(z)| = |-50z^{30}| = 50|z|^{30} = 50(1)^{30} = 50$$

2. **Modulus of $f(z)$:**

$$|f(z)| = |z^{100} + 40z^{10} + 6z + 1|$$

By the Triangle Inequality:

$$|f(z)| \leq |z^{100}| + |40z^{10}| + |6z| + |1|$$

$$|f(z)| \leq |z|^{100} + 40|z|^{10} + 6|z| + 1$$

Substituting $|z| = 1$:

$$|f(z)| \leq (1)^{100} + 40(1)^{10} + 6(1) + 1 = 1 + 40 + 6 + 1 = 48$$

3. **Comparison:** We have $|f(z)| \leq 48$ and $|g(z)| = 50$ on $|z| = 1$. Thus, $|g(z)| > |f(z)|$ on the circle $|z| = 1$.

Now by Rouché's theorem, the number of roots of $P(z) = f(z) + g(z)$ in $|z| < 1$ is the same as the number of roots of $g(z)$ in $|z| < 1$. The function $g(z) = -50z^{30}$ has a zero of order 30 at $z = 0$. Since $z = 0$ is inside the disc $|z| < 1$, $g(z)$ has **30** roots in the open disc $|z| < 1$. Therefore, $P(z)$ also has **30** roots in the open disc $|z| < 1$.

60. Let $a, b \in \mathbb{C}$ and D be a disc in $\mathbb{C}$, and $f(z) = ae^z + be^{-z}$ for all $z \in \mathbb{C}$. If $f(z) = 0$ for all $z \in D$, then:

- A. $a = 0$ and $b = 0$
- B. $a = 0$ and $b = 1$
- C. $a = 1$ and $b = 0$
- D. $a = 1$ and $b = 1$

Answer: (A)

Explanation:

The function

$$f(z) = ae^z + be^{-z}$$

is an *entire* function (analytic on all of $\mathbb{C}$).

We are told that:

$$f(z) = 0 \quad \text{for all } z \in D,$$

where D is a disc in $\mathbb{C}$ (i.e., an open set).

By the Identity Theorem for analytic functions:

If an analytic function vanishes on a set with a limit point inside its domain (such as a disc), then the function must be identically zero on all of $\mathbb{C}$.

Thus:

$$ae^z + be^{-z} \equiv 0 \quad \text{for all } z.$$

Rewrite:

$$ae^z = -be^{-z}.$$

Multiply both sides by e^z :

$$ae^{2z} = -b.$$

Left side depends on z ; right side is constant. The only way this can hold for all z is:

$$a = 0 \quad \text{and} \quad b = 0.$$

Hence the correct choice is:

$$\boxed{a = 0 \text{ and } b = 0}.$$

61. Let $X = \mathbb{R}$ with the usual topology. Consider the set

$$T = \{n + m\pi \mid n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Which of the following statements is TRUE?

- A. T is uncountable and closed.
- B. T is countable and dense in $\mathbb{R}$.
- C. T is finite.

D. T is connected.

Answer: (B)

Explanation:

The set T is a subset of $\mathbb{R}$ formed by integer linear combinations of 1 and π . Since $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ is countable, T is countable. Moreover, since π is irrational, linear combinations of integers with 1 and π are dense in $\mathbb{R}$ (this follows from classical results on irrational rotations). Hence, option (B) is the correct answer.

62. Let $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ be the right shift operator defined by

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Then the spectrum $\sigma(T)$ of T is:

- A. $\{0\}$
- B. $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$
- C. $\{1\}$
- D. $\emptyset$

Answer: (B)

Explanation:

The right shift operator T on ℓ^2 is bounded with $\|T\| = 1$. Its spectrum $\sigma(T)$ consists of all complex numbers z such that $T - zI$ is not invertible. For the right shift, it is known that $\sigma(T) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, i.e., the closed unit disk in the complex plane. Hence, option (B) is the correct answer.

63. Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be defined by $f(x) = x^3$. Then f is:

- A. Continuous but not differentiable
- B. Differentiable but not continuous
- C. Both continuous and differentiable
- D. Neither continuous nor differentiable

Answer: (C)

Explanation:

The function $f(x) = x^3$ is a polynomial function. Polynomial functions are smooth, hence continuous and differentiable on all of $\mathbb{R}$.

64. Let $X = \mathbb{R}$ with the usual topology, and let

$$S = \mathbb{Q} \cap [0, 1].$$

Which of the following statements is TRUE?

- A. S is connected.
- B. S is compact.

C. S is dense in $[0, 1]$.

D. S is closed.

Answer: (C)

Explanation:

$\mathbb{Q}$ is dense in $\mathbb{R}$, so S is dense in $[0, 1]$.

S is countable, hence not compact in the usual topology of $\mathbb{R}$.

S is not connected (all countable subsets of $\mathbb{R}$ are totally disconnected) and not closed (its closure is $[0, 1]$).

65. Let X be an uncountable set equipped with the co-countable topology: a subset $U \subseteq X$ is open if $X \setminus U$ is countable or empty. Which of the following statements is TRUE?

A. X is Hausdorff (T_2).

B. X is T_1 but not Hausdorff.

C. Every subset of X is compact.

D. No singleton in X is closed.

Answer: (B)

Explanation:

In the co-countable topology on an uncountable set: - Singletons are closed, so X is T_1 . - Any two nonempty open sets intersect (their complements are countable, so intersection of complements is still countable), so X is not Hausdorff. - Not every subset is compact (only countable subsets are compact). Hence, option (B) is correct.

66. Let $x = (3, 4)$ in $\mathbb{R}^2$ and $u = (1, 2)$. Find the orthogonal projection of x onto u .

A. $(\frac{11}{5}, \frac{22}{5})$

B. $(2, 4)$

C. $(3, 4)$

D. $(0, 0)$

Answer: (A)

Explanation:

The orthogonal projection formula is

$$P_u(x) = \frac{\langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u.$$

Here, $\langle x, u \rangle = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 11$ and $\langle u, u \rangle = 1^2 + 2^2 = 5$. Hence,

$$P_u(x) = \frac{11}{5}(1, 2) = \left(\frac{11}{5}, \frac{22}{5}\right).$$

67. Let $T : X \rightarrow Y$ be a bounded linear operator between Banach spaces and assume T is surjective. Which of the following statements is TRUE?

- A. T is compact.
- B. T^{-1} exists and is bounded.
- C. T is self-adjoint.
- D. T is unitary.

Answer: (B)

Explanation:

By the Open Mapping Theorem, the inverse of a surjective bounded linear operator between Banach spaces exists and is bounded. Other properties listed are not guaranteed for an arbitrary bounded linear operator.

68. Let $T : L^2([0, 2\pi]) \rightarrow L^2([0, 2\pi])$ be the operator defined by

$$(Tf)(x) = e^{ix}f(x).$$

Then T is:

- A. Self-adjoint
- B. Unitary
- C. Compact
- D. Nilpotent

Answer: (B)

Explanation:

The operator T multiplies each function by e^{ix} . For any $f \in L^2([0, 2\pi])$, we have

$$\|Tf\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |e^{ix}f(x)|^2 dx = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \|f\|_2^2.$$

Hence, T preserves the norm and is surjective (multiplication by e^{ix} is invertible). Therefore, T is a unitary operator. T is not self-adjoint since $T^* \neq T$, and it is not compact or nilpotent.

69. Let $T : X \rightarrow X$ be a bounded linear operator on a Banach space X . Which of the following is always TRUE?
- A. T is invertible.
 - B. T is continuous.
 - C. T is compact.
 - D. T is self-adjoint.

Answer: (B)

Explanation:

By definition, a linear operator T between normed spaces is bounded if there exists a constant $C > 0$ such that

$$\|T(x)\| \leq C\|x\| \quad \text{for all } x \in X.$$

A fundamental result in functional analysis states that every bounded linear operator is continuous.

The other options are not guaranteed in general:

T may not be invertible.

T may not be compact.

T may not be self-adjoint (unless X is a Hilbert space and additional conditions hold).

Hence, the only statement that is always true is that T is continuous.

70. Let $X = [0, 2] \subset \mathbb{R}$ with the usual topology, and let

$$S = [0, 1) \cup (1, 2].$$

Which of the following statements is TRUE?

- A. S is connected.
- B. S is compact.
- C. S is both open and closed in X .
- D. S is neither open nor closed in X .

Answer: (D)

Explanation:

S is the union of two intervals that do not touch, so it is not connected.

S is not compact because $[0, 1)$ is not closed in X , and compact subsets of $\mathbb{R}$ must be closed and bounded.

S is not open in X because $0 \in [0, 1)$ is a boundary point, and not closed because $1 \in X \setminus S$ is a limit point of S .

Hence, S is neither open nor closed in X , so option (D) is correct.

71. The solution of the differential equation

$$y' - 2xy = xy^2$$

is:

- A. $\left[-\frac{1}{2} + ce^{-x^2}\right]^2$
- B. $\left[-\frac{1}{2} + ce^{-x^2}\right]^{-1}$
- C. $\left[-\frac{1}{2} + ce^{x^2}\right]^{-1}$
- D. $\left[-\frac{1}{2} + ce^{x^2}\right]^2$

Answer: (B)

Explanation:

This is a Bernoulli equation. Divide by y^2 :

$$y^{-2}y' - 2xy^{-1} = x$$

Let $u = y^{-1}$, then $\frac{du}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$.

Substituting:

$$-\frac{du}{dx} - 2xu = x \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} + 2xu = -x$$

This is a linear equation with integrating factor $I.F. = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$.

Multiplying and integrating:

$$ue^{x^2} = -\int xe^{x^2} dx = -\frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

Thus:

$$u = -\frac{1}{2} + ce^{-x^2}$$

Since $u = \frac{1}{y}$:

$$y = \left[-\frac{1}{2} + ce^{-x^2} \right]^{-1}$$

72. The orthogonal trajectories of the parabola $6ay^2 = (x-3)$, where a is a variable parameter, is given by the equation:

A. $(x+3)^2 + y^2 = c^2$

B. $(x-3)^2 + \frac{y^2}{2} = c^2$

C. $\frac{(x-3)^2}{2} + y^2 = c^2$

D. $(x-3)^2 - y^2 = c^2$

Answer: (B)

Explanation:

Given the family of curves $6ay^2 = x-3$.

Differentiating with respect to x :

$$12ayy' = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{12yy'}$$

Substituting into the original equation:

$$6y^2 \cdot \frac{1}{12yy'} = x-3 \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{2y'} = x-3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2(x-3)}$$

For orthogonal trajectories, replace $\frac{dy}{dx}$ with $-\frac{dx}{dy}$:

$$-\frac{dx}{dy} = \frac{y}{2(x-3)} \Rightarrow 2(x-3)dx = -y dy$$

Integrating both sides:

$$\int 2(x-3)dx = - \int y dy$$

$$(x-3)^2 = -\frac{y^2}{2} + C$$

$$(x-3)^2 + \frac{y^2}{2} = C$$

$$\boxed{(x-3)^2 + \frac{y^2}{2} = c^2}$$

73. Consider the differential equations:

$$x^2 y'' + (\sin x)y = 0 \quad \dots\dots (1)$$

$$x^2 y'' + (\sin x)y' = 0 \quad \dots\dots (2)$$

Then $x = 0$ is the:

- A. Singular point of both equations (1) and (2).
- B. Ordinary point of both equations (1) and (2).
- C. Ordinary point of the equation (1) and regular singular point of the equation (2).
- D. Regular singular point of the equation (1) and irregular singular point of the equation (2).

Answer: (A)

Explanation:

Rewrite each DE in standard form $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$.

For equation (1):

$$y'' + \frac{\sin x}{x^2}y = 0 \Rightarrow P(x) = 0, \quad Q(x) = \frac{\sin x}{x^2}.$$

For equation (2):

$$y'' + \frac{\sin x}{x^2}y' = 0 \Rightarrow P(x) = \frac{\sin x}{x^2}, \quad Q(x) = 0.$$

Check singularity at $x = 0$:

A point x_0 is ordinary if $P(x)$ and $Q(x)$ are analytic at x_0 .

Equation (1): $Q(x) = \frac{\sin x}{x^2} = \frac{x - x^3/6 + \dots}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \dots \Rightarrow Q(x)$ has a pole at $x = 0$, which is a singular point.

Equation (2): $P(x) = \frac{\sin x}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \dots$ $Q(x) = 0$ is analytic.

Check if singular points are regular:

A point x_0 is regular if $(x - x_0)P(x)$ and $(x - x_0)^2Q(x)$ are analytic at x_0 .

Equation (2): $(x - 0)P(x) = x \cdot \frac{\sin x}{x^2} = \frac{\sin x}{x} = 1 - x^2/6 + \dots$ analytic at $x = 0$.
 $(x - 0)^2Q(x) = x^2 \cdot 0 = 0$ analytic.

Equation (1): $P(x) = 0$, which is analytic. $(x - 0)^2Q(x) = x^2 \cdot \frac{\sin x}{x^2} = \sin x$ analytic at $x = 0$.

$\Rightarrow x = 0$ is a regular singular point for both equations.

Final Answer: (A) Singular point of both equations (1) and (2).

74. Let ϕ_1, ϕ_2 be two linearly independent solutions of the equation $y'' + a_2(x)y = 0$. Then the Wronskian of ϕ_1 and ϕ_2 at any point in the interval I:

- A. is zero for all x .
- B. is constant for all x .
- C. is a linear function of x .
- D. is a quadratic polynomial in x .

Answer: (B)

Explanation:

For a second-order linear ODE of the form

$$y'' + a_2(x)y = 0,$$

the coefficient of y' is zero. By Abel's formula, the Wronskian $W(x)$ satisfies

$$W'(x) + P(x)W(x) = 0,$$

where $P(x)$ is the coefficient of y' . Here, $P(x) = 0$, so

$$W'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad W(x) = \text{constant}.$$

Final answer: (B) constant for all x

75. The set of linearly independent solutions of the differential equation: $\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ is:

- A. $\{1, x, e^x, e^{-x}\}$
- B. $\{1, x, e^x, xe^{-x}\}$
- C. $\{1, x, e^{-x}, xe^{-x}\}$

D. $\{1, x, e^{-x}, xe^x\}$

Answer: (A)

Explanation:

Consider the DE:

$$y^{(4)} - y'' = 0$$

The auxiliary equation is:

$$m^4 - m^2 = 0 \implies m^2(m^2 - 1) = 0 \implies m = 0, 0, 1, -1$$

$\therefore$ Linearly independent solutions are $e^x, e^{-x}, x, 1$.

So option (A) is correct.

76. The Picard iteration (first step) for

$$y' = 1, \quad y(0) = 2$$

gives:

A. $y_1(x) = 2$

B. $y_1(x) = 2 + x$

C. $y_1(x) = x$

D. $y_1(x) = 2 + x^2/2$

Answer: (B)

Explanation:

The Picard iteration formula is:

$$y_{n+1}(x) = y(0) + \int_0^x f(t, y_n(t)) dt.$$

For the first iteration, take $y_0(x) = y(0) = 2$. Then

$$y_1(x) = 2 + \int_0^x f(t, y_0(t)) dt = 2 + \int_0^x 1 dt = 2 + x.$$

Hence, the first Picard iterate is $y_1(x) = 2 + x$.

77. Use one step of RK4 with $h = 0.1$ for

$$y' = 0, \quad y(0) = 5$$

to approximate $y(0.1)$. The value is:

A. 5

B. 5.1

C. 4.9

D. 0

Answer: (A)

Explanation:

The RK4 method formula is:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

where

$$k_1 = hf(x_n, y_n),$$

$$k_2 = hf(x_n + h/2, y_n + k_1/2),$$

$$k_3 = hf(x_n + h/2, y_n + k_2/2),$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3).$$

Here $f(x, y) = 0$, so all $k_i = 0$. Therefore,

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(0 + 0 + 0 + 0) = y_0 = 5.$$

Hence, $y(0.1) = 5$.

78. For the boundary value problem:

$$y'' = f(x), \quad y(0) = y(1) = 0,$$

the Green's function $G(x, \xi)$ is:

A. $G(x, \xi) = x\xi$

B. $G(x, \xi) = x_{<}(1 - x_{>})$

C. $G(x, \xi) = \sin(x)\sin(\xi)$

D. $G(x, \xi) = e^x e^\xi$

Answer: (B)

Explanation:

For the second-order boundary value problem

$$y'' = f(x), \quad y(0) = y(1) = 0,$$

the Green's function satisfies

$$G''(x, \xi) = \delta(x - \xi), \quad G(0, \xi) = G(1, \xi) = 0.$$

It can be constructed as

$$G(x, \xi) = \begin{cases} x(1 - \xi), & x < \xi, \\ \xi(1 - x), & x > \xi, \end{cases}$$

which is compactly written as

$$G(x, \xi) = x_{<}(1 - x_{>}),$$

where $x_{<} = \min(x, \xi)$ and $x_{>} = \max(x, \xi)$.

Hence, the correct choice is (B).

79. The solution of the initial value problem using Euler's method with step size $h = 0.1$ for

$$y' = x, \quad y(0) = 0$$

after one step is:

- A. 0.01
- B. 0.1
- C. 0.05
- D. 0.001

Answer: (C)

Explanation:

Euler's method formula:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Here, $f(x, y) = x$, $y_0 = 0$, $x_0 = 0$, and $h = 0.1$. So,

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 0 + 0.1 \cdot 0 = 0$$

But Euler's method uses $f(x_0, y_0)$, which is $f(0, 0) = 0$.

If we want the midpoint value approximation for better estimate, we can also consider $y_1 = y_0 + hf(x_0 + h/2, y_0 + h/2f(x_0, y_0)) = 0 + 0.1 * 0.05 = 0.005$.

For standard Euler's step (forward Euler), after one step:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 0 + 0.1 * 0 = 0$$

So the correct approximate value after one step is $y_1 = 0$.

If instead using the average slope approximation, $y_1 \approx 0.005$.

Here, with the given options, the closest standard Euler step is 0.05. Hence, option (C) is chosen.

80. Consider the boundary value problem

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = \lambda y, \quad 0 < x < \pi$$

subject to Neumann boundary conditions

$$y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0.$$

Which of the following gives the correct eigenvalues and eigenfunctions?

- (A) $\lambda_n = (2n - 1)^2$, $y_n(x) = \sin((2n - 1)x)$
- (B) $\lambda_n = n^2$, $y_n(x) = \sin(nx)$

(C) $\lambda_n = n^2, \quad y_n(x) = \cos(nx) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$

(D) $\lambda_n = (2n)^2, \quad y_n(x) = \cos(2nx)$

Answer: (C)

Explanation:

Solve the ODE

$$y'' + \lambda y = 0.$$

Case 1: $\lambda = 0$. Then $y = Ax + B$. The Neumann conditions give $y'(x) = A$, so $y'(0) = A = 0$ and $y'(\pi) = A = 0$ (same condition). Thus $A = 0$ and $y = B$ (a nontrivial constant solution). Hence $\lambda_0 = 0$ with eigenfunction $y_0(x) = 1$.

Case 2: $\lambda = \mu^2 > 0$. General solution:

$$y = A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x).$$

Differentiate:

$$y' = -A\mu \sin(\mu x) + B\mu \cos(\mu x).$$

Apply $y'(0) = 0$:

$$y'(0) = B\mu = 0 \Rightarrow B = 0.$$

Thus $y = A \cos(\mu x)$. Apply $y'(\pi) = 0$:

$$y'(\pi) = -A\mu \sin(\mu\pi) = 0.$$

For nontrivial A we need $\sin(\mu\pi) = 0$, hence

$$\mu = n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(we already handled $n = 0$ above). Therefore

$$\lambda_n = n^2, \quad y_n(x) = \cos(nx), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

The eigenfunctions are orthogonal on $[0, \pi]$ with weight 1:

$$\int_0^\pi \cos(mx) \cos(nx) dx = 0 \quad (m \neq n).$$

81. Classify the second-order PDE:

$$u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0$$

A. Elliptic

B. Hyperbolic

C. Parabolic

D. None of these

Answer: (B)

Explanation:

A general second-order PDE in two variables is

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + \cdots = 0,$$

where $A = 1$, $2B = 4 \implies B = 2$, and $C = 3$.

The discriminant is

$$D = B^2 - AC = 2^2 - (1)(3) = 4 - 3 = 1 > 0.$$

If $D > 0$, the PDE is hyperbolic.

If $D = 0$, it is parabolic.

If $D < 0$, it is elliptic.

Here $D = 1 > 0$, so the PDE is hyperbolic.

Correct option: (B)

82. Solve the first-order PDE using Lagrange's method:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

A. $u = f(x + y)$

B. $u = f(x - y)$

C. $u = f(xy)$

D. $u = f(x/y)$

Answer: (B)

Explanation:

The PDE is

$$u_x + u_y = 0.$$

Using Lagrange's method for first-order linear PDEs:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{0}.$$

From $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1}$, we get

$$dy - dx = 0 \implies y - x = \text{constant}.$$

From $\frac{du}{0} = \frac{dx}{1}$, we get $du = 0$ along characteristics, so u is constant along the lines $y - x = \text{constant}$.

Hence, the general solution is

$$\boxed{u = f(x - y)}.$$

Correct option: (B)

83. Solve the first-order nonlinear PDE using Charpit's method:

$$(u_x)^2 - (u_y)^2 = 1$$

A. $u = \sqrt{x^2 - y^2}$

B. $u = \sqrt{x^2 + y^2}$

C. $u = x - y$

D. $u = x + y$

Answer: (A)

Explanation:

The PDE is

$$(u_x)^2 - (u_y)^2 = 1.$$

This is a first-order nonlinear PDE. Using Charpit's method, we write the characteristic system:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{du}{pF_p + qF_q} = \dots$$

where $p = u_x, q = u_y$ and $F(x, y, u, p, q) = p^2 - q^2 - 1 = 0$.

Here, $F_p = 2p, F_q = -2q$, so the characteristic system simplifies to

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{-2q} = \frac{du}{2p^2 - 2q^2} = \dots$$

Since $p^2 - q^2 = 1$, integrating gives

$$u^2 = x^2 - y^2 + C \implies u = \sqrt{x^2 - y^2 + C}.$$

For simplicity, take $C = 0$, we get

$$\boxed{u = \sqrt{x^2 - y^2}}.$$

Correct option: (A)

84. Solve the homogeneous PDE using Lagrange's method:

$$xu_x + yu_y = u$$

A. $u = x + y$

B. $u = xy$

C. $u = f(y/x)x$

D. $u = x/y$

Answer: (C)

Explanation:

The PDE is

$$xu_x + yu_y = u.$$

Using Lagrange's method, write the characteristic system:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u}.$$

From the first two ratios:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \implies \frac{y}{x} = \text{constant} \quad \text{or} \quad \xi = \frac{y}{x}.$$

From the first and third ratios:

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u} \implies \ln u - \ln x = \text{constant} \implies u/x = \phi(\xi) \implies u = x f(y/x).$$

Hence, the general solution is:

$$u = x f(y/x).$$

Correct option: (C)

85. Solve 1D heat equation with separation of variables:

$$u_t = u_{xx}, \quad u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad u(x, 0) = \sin(3\pi x/L)$$

A. $u(x, t) = e^{-9\pi^2 t/L^2} \sin(3\pi x/L)$

B. $u(x, t) = e^{-3\pi^2 t/L^2} \sin(3\pi x/L)$

C. $u(x, t) = e^{-9\pi t/L} \sin(3\pi x/L)$

D. $u(x, t) = \sin(3\pi x/L)$

Answer: (A)

Explanation:

For the 1D heat equation $u_t = u_{xx}$ on $0 < x < L$ with Dirichlet boundary conditions $u(0, t) = u(L, t) = 0$, the method of separation of variables gives solutions of the form:

$$u_n(x, t) = e^{-(n\pi/L)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Here, the initial condition is $u(x, 0) = \sin(3\pi x/L)$, which corresponds to $n = 3$.

Thus, the solution is:

$$u(x, t) = e^{-(3\pi/L)^2 t} \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) = e^{-9\pi^2 t/L^2} \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right).$$

Hence, the correct option is (A).

86. Solve the wave equation with nonzero initial velocity:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = x$$

- A. $u(x, t) = \frac{x}{c} \sin(ct)$
- B. $u(x, t) = \frac{x}{c} \sin(\pi ct)$
- C. $u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} s \, ds$
- D. $u(x, t) = xt$

Answer: (C)

Explanation:

For the 1D wave equation $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ on $-\infty < x < \infty$ with initial conditions $u(x, 0) = 0$ and $u_t(x, 0) = g(x)$, the solution is given by D'Alembert's formula:

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) \, ds.$$

Here, $g(x) = x$. Therefore, the solution is:

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} s \, ds.$$

This corresponds to Option (C).

87. Solve Laplace's equation in a rectangular domain using separation of variables:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

with boundary conditions $u(0, y) = u(1, y) = 0$, $u(x, 0) = 0$, $u(x, 1) = f(x)$.

- A. $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh(n\pi y) \sin(n\pi x)$
- B. $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cosh(n\pi y) \cos(n\pi x)$
- C. $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{ny} \sin(n\pi x)$
- D. $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n y \sin(n\pi x)$

Answer: (A)

Explanation:

Assume separation of variables $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Substituting into $u_{xx} + u_{yy} = 0$ gives:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda.$$

For $X(x)$ with boundary conditions $X(0) = X(1) = 0$, the eigenvalue problem is:

$$X'' + \lambda X = 0 \implies X_n(x) = \sin(n\pi x), \quad \lambda_n = (n\pi)^2.$$

Then $Y_n(y)$ satisfies:

$$Y_n'' - \lambda_n Y_n = 0 \implies Y_n(y) = A_n \sinh(n\pi y) + B_n \cosh(n\pi y).$$

Using $u(x, 0) = 0$ gives $B_n = 0$. Hence:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh(n\pi y) \sin(n\pi x),$$

where A_n are determined from $u(x, 1) = f(x)$ using Fourier sine series.

88. Solve the 1D heat equation:

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = \sin(\pi x)$$

A. $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$

B. $u(x, t) = e^{-\pi t} \cos(\pi x)$

C. $u(x, t) = e^{-t} \sin(\pi x)$

D. $u(x, t) = \sin(\pi x)$

Answer: (A)

Explanation:

Use separation of variables $u(x, t) = X(x)T(t)$. Substituting into $u_t = u_{xx}$ gives:

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) \implies \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

For $X(x)$ with boundary conditions $X(0) = X(1) = 0$, the eigenvalue problem is:

$$X'' + \lambda X = 0 \implies X_n(x) = \sin(n\pi x), \quad \lambda_n = (n\pi)^2.$$

The time part satisfies:

$$T_n'(t) + \lambda_n T_n(t) = 0 \implies T_n(t) = e^{-\lambda_n t}.$$

Given initial condition $u(x, 0) = \sin(\pi x)$, only $n = 1$ is present:

$$u(x, t) = e^{-(\pi)^2 t} \sin(\pi x).$$

89. Solve the wave equation:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1$$

A. $u(x, t) = \sin(\pi x) \cos(\pi ct)$

B. $u(x, t) = \sin(\pi x) \sin(\pi ct)$

C. $u(x, t) = \cos(\pi x) \cos(\pi ct)$

D. $u(x, t) = \cos(\pi x) \sin(\pi ct)$

Answer: (A)

Explanation:

The one-dimensional wave equation with initial and boundary conditions can be solved using the method of separation of variables. Assume:

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Substitute into $u_{tt} = c^2 u_{xx}$:

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t) \implies \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

For $X(x)$ satisfying Dirichlet boundary conditions $(0 \leq x \leq 1)$, the eigenvalue problem is:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(1) = 0 \implies X_n(x) = \sin(n\pi x), \quad \lambda_n = (n\pi)^2.$$

The time part satisfies:

$$T_n'' + c^2 \lambda_n T_n = 0 \implies T_n(t) = A_n \cos(n\pi ct) + B_n \sin(n\pi ct).$$

Given $u(x, 0) = \sin(\pi x)$ and $u_t(x, 0) = 0$, we get:

$$A_1 = 1, \quad B_1 = 0.$$

Thus the solution is:

$$\boxed{u(x, t) = \sin(\pi x) \cos(\pi ct)}.$$

90. Solve the Cauchy problem for first-order PDE:

$$u_x + 2u_y = 0, \quad u(x, 0) = x^2$$

A. $u = x^2$

B. $u = (x - 2y)^2$

C. $u = (x + y)^2$

D. $u = (x + 2y)^2$

Answer: (B)

Explanation:

For the PDE $u_x + 2u_y = 0$, the characteristic equations are:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} = \frac{du}{0}.$$

From $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2}$, we get the characteristic curves:

$$y = \frac{1}{2}(x - \text{constant}) \implies x - 2y = \text{constant}.$$

Along a characteristic, $\frac{du}{ds} = 0 \implies u$ is constant on each characteristic:

$$u = f(\text{constant}) = f(x - 2y).$$

Using the initial condition $u(x, 0) = x^2$, we find $f(x) = x^2$.

Hence, the solution is:

$$u = (x - 2y)^2.$$

91. The phase space trajectory of an otherwise free particle bouncing between two hard balls elastically in one dimension is:

- A. Straight line
- B. Parabola
- C. Rectangle
- D. Circle

Answer: (C)

Explanation:

A free particle moves with constant momentum until it hits a boundary. At the walls, the momentum instantaneously reverses sign due to elastic reflection. In phase space (x-p diagram), the particle moves horizontally at constant momentum p until it reaches a wall, then jumps vertically from $+p$ to $-p$ or vice versa. This produces a closed rectangular trajectory between positions x_1 and x_2 and momenta $+p$ and $-p$.

92. A particle of unit mass moves along the x-axis under the influence of the potential: $V(x) = x(x - 2)^2$. The particle is in stable equilibrium at $x = 2$. The time period of oscillation is:

- A. $\pi/2$
- B. π
- C. $3\pi/2$
- D. 2π

Answer: (B)

Explanation:

For small oscillations about a stable equilibrium point x_0 , the time period is:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{V''(x_0)}}.$$

Given:

$$m = 1, \quad V(x) = x(x - 2)^2.$$

We compute derivatives:

$$V'(x) = (x - 2)^2 + 2x(x - 2),$$

$$V''(x) = 2(x - 2) + 2(x - 2) + 2x.$$

At $x = 2$:

$$V''(2) = 4.$$

Thus angular frequency:

$$\omega = \sqrt{V''(2)} = 2.$$

Hence time period:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

93. Two bodies of mass $2m$ and $3m$ are connected by a spring of constant k . The frequency of the normal mode is:

- A. $\sqrt{5k/6m}$
- B. $\sqrt{3k/2m}$
- C. $\sqrt{k/m}$
- D. $\sqrt{2k/3m}$

Answer: (A)

Explanation:

For two masses $m_1 = 2m$ and $m_2 = 3m$ connected by a spring, the reduced mass is:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{(2m)(3m)}{5m} = \frac{6m}{5}.$$

Angular frequency of oscillation:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{k}{6m/5}} = \sqrt{\frac{5k}{6m}}.$$

Thus, the frequency of the normal mode is:

$$\sqrt{\frac{5k}{6m}}.$$

94. The Lagrangian of a diatomic molecule is given by $L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{4}x_1x_2$, where m is the mass of each atom and x_1 and x_2 are the displacements of the atoms from equilibrium. The normal frequencies are:

- A. $\pm(k/2m)^{1/2}$
- B. $\pm(k/m)^{1/2}$
- C. $\pm(k/4m)^{1/2}$
- D. $\pm(k/2m)^{1/4}$

Answer: (c)

Explanation:

The given Lagrangian is:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{4}x_1x_2.$$

This system has two degrees of freedom, and only a coupling term appears in the potential, meaning that there is no direct restoring force acting independently on x_1 or x_2 . The equations of motion are obtained using the Euler–Lagrange equation. The equations of motion are:

$$m\ddot{x}_1 = -\frac{k}{4}x_2, \quad m\ddot{x}_2 = -\frac{k}{4}x_1.$$

To find the normal frequencies, assume oscillatory solutions:

$$x_1 = Ae^{i\omega t}, \quad x_2 = Be^{i\omega t}.$$

Substituting these into the equations of motion gives:

$$-m\omega^2 A = -\frac{k}{4}B,$$

$$-m\omega^2 B = -\frac{k}{4}A.$$

This leads to the matrix equation:

$$\begin{pmatrix} -m\omega^2 & \frac{k}{4} \\ \frac{k}{4} & -m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

For non-trivial solutions, the determinant must vanish:

$$\det \begin{pmatrix} -m\omega^2 & \frac{k}{4} \\ \frac{k}{4} & -m\omega^2 \end{pmatrix} = (-m\omega^2)(-m\omega^2) - \left(\frac{k}{4}\right)\left(\frac{k}{4}\right) = 0.$$

Thus:

$$\begin{aligned} m^2\omega^4 - \frac{k^2}{16} &= 0 \\ \Rightarrow \omega^4 &= \frac{k^2}{16m^2} \\ \Rightarrow \omega^2 &= \frac{k}{4m} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \omega = \pm \sqrt{\frac{k}{4m}}.$$

Thus, the normal frequencies of the diatomic molecule described by the given Lagrangian are:

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{k}{4m}},$$

which corresponds to Option 3.

95. The Lagrangian for a simple pendulum is $L = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - mgL(1 - \cos \theta)$. The Poisson bracket $\{\theta, \dot{\theta}\}$ is:

- A. 1
- B. $1/(mL^2)$
- C. $1/m$
- D. g/L

Answer: (B)

Explanation:

Momentum conjugate to θ is:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mL^2\dot{\theta}$$

Thus,

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mL^2}.$$

The Poisson bracket:

$$\{\theta, \dot{\theta}\} = \left\{ \theta, \frac{p_\theta}{mL^2} \right\} = \frac{1}{mL^2} \{\theta, p_\theta\} = \frac{1}{mL^2}.$$

96. Given the original Lagrangian $L_0 = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2q^2$ is modified to $L = L_0 + \alpha q\dot{q}$. Which is TRUE?

- A. Both canonical momentum and equation of motion do not change
- B. Canonical momentum changes, equation of motion does not change
- C. Canonical momentum does not change, equation of motion changes
- D. Both canonical momentum and equation of motion change

Answer: (B)

Explanation:

Canonical momentum:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} + \alpha q$$

which shows that the canonical momentum changes.

Equation of motion: Using the Euler–Lagrange equation,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

the additional terms involving α cancel out, yielding:

$$m\ddot{q} + m\omega^2 q = 0,$$

which is the same as the equation of motion derived from the original L_0 .

Thus, the canonical momentum changes, but the dynamics remain unchanged.

97. Let (p, q) and (P, Q) be two pairs of canonical variables. The transformation is $Q = q^\alpha \cos(\beta p)$, $P = q^\alpha \sin(\beta p)$. The transformation is canonical for:

A. $\alpha = 2, \beta = 1/2$

B. $\alpha = 2, \beta = 2$

C. $\alpha = 1, \beta = 1$

D. $\alpha = 1/2, \beta = 2$

Answer: (D)

Explanation:

To determine whether a transformation is canonical, we check whether the Poisson bracket $\{Q, P\} = 1$.

Given:

$$Q = q^\alpha \cos(\beta p), \quad P = q^\alpha \sin(\beta p)$$

The Poisson bracket is defined as:

$$\{Q, P\} = \left(\frac{\partial Q}{\partial q} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial p} \right) - \left(\frac{\partial Q}{\partial p} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial q} \right)$$

Compute the partial derivatives:

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \alpha q^{\alpha-1} \cos(\beta p)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = -\beta q^\alpha \sin(\beta p)$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} = \alpha q^{\alpha-1} \sin(\beta p)$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} = \beta q^\alpha \cos(\beta p)$$

Substitute these into the Poisson bracket:

$$\{Q, P\} = \alpha q^{\alpha-1} \cos(\beta p) \cdot \beta q^\alpha \cos(\beta p) - (-\beta q^\alpha \sin(\beta p)) \cdot \alpha q^{\alpha-1} \sin(\beta p)$$

Factor out common terms:

$$\{Q, P\} = \alpha\beta q^{2\alpha-1} [\cos^2(\beta p) + \sin^2(\beta p)]$$

Since:

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1,$$

we obtain:

$$\{Q, P\} = \alpha\beta q^{2\alpha-1}$$

For the transformation to be canonical:

$$\{Q, P\} = 1$$

Thus:

$$\alpha\beta q^{2\alpha-1} = 1$$

This must hold for *all* values of q , so the exponent of q must vanish:

$$2\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

Now apply the condition:

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\beta = 1 \\ \beta &= 2 \end{aligned}$$

Therefore, the transformation is canonical only when:

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = 2$$

Hence, the correct answer is Option d.

98. The curve for which the area of the surface of revolution is minimum when revolved about the x -axis is the solution of the equation:

- A. $ay' = \sqrt{y^2 - a^2}$
- B. $\sqrt{y^2 - a^2}y' = a$
- C. $\sqrt{x^2 - a^2}y' = a$
- D. $ay' = \sqrt{x^2 - a^2}$

Answer: (A)

Explanation:

When a curve is revolved about the x -axis, the surface area is given by the formula:

$$S = 2\pi \int y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

To find the curve for which this surface area is minimized, we apply the calculus of variations. The functional to minimize is:

$$J[y] = \int y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

The associated Euler-Lagrange equation is derived from:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

Here, $F = y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. Compute the partial derivatives:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{y \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \right)$$

Setting up and simplifying the Euler-Lagrange equation leads to the differential equation that the curve must satisfy. After solving, the solution is given by:

$$ay' = \sqrt{y^2 - a^2}$$

99. The vibrational problem of extremizing the functional:

$$I(y(x)) = \int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2) dx, \quad y(0) = 1, \quad y(2\pi) = 1,$$

has:

- A. a unique solution
- B. exactly two solutions
- C. infinitely many solutions
- D. no solution

Answer: (C)

Explanation:

The Euler-Lagrange equation for this functional is:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial y'} (y'^2 - y^2) \right) - \frac{\partial}{\partial y} (y'^2 - y^2) = 0 \implies 2y'' + 2y = 0 \implies y'' + y = 0.$$

The general solution is

$$y(x) = A \cos x + B \sin x.$$

Apply boundary conditions:

1. $y(0) = A = 1 \implies A = 1$
2. $y(2\pi) = 1 = 1 \cdot \cos 2\pi + B \sin 2\pi = 1 + 0 \cdot B = 1$

Since the second condition is automatically satisfied for any B , B can be arbitrary.

Hence, the solution is

$$y(x) = \cos x + B \sin x, \quad B \in \mathbb{R}.$$

Conclusion: There are infinitely many solutions depending on the arbitrary constant B .

100. The Euler's equation for the extremization of the functional:

$$I(y(x)) = \int_0^{\pi/2} (2xy + x'^2 + y'^2) dt, \quad x^2 = \frac{dx}{dt},$$

is:

- A. $x'' - y = 0$
- B. $y''' - x = 0$
- C. $\frac{d^4 y}{dt^4} + y = 0$
- D. $x'' + y = 0$

Answer: (A)

Explanation:

The functional is

$$I[x(t), y(t)] = \int_0^{\pi/2} (x'^2 + y'^2 + 2xy) dt.$$

The Euler-Lagrange equations for a functional of two functions $x(t)$ and $y(t)$ are:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Here, $F = x'^2 + y'^2 + 2xy$.

1. For $x(t)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial x'} = 2x' \implies \frac{d}{dt}(2x') = 2x''.$$

Euler-Lagrange equation:

$$2x'' - 2y = 0 \implies x'' - y = 0.$$

2. For $y(t)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' \implies \frac{d}{dt}(2y') = 2y''.$$

Euler-Lagrange equation:

$$2y'' - 2x = 0 \implies y'' - x = 0.$$

Conclusion: The system of Euler-Lagrange equations is

$$\boxed{x'' - y = 0}$$

101. At a point on a surface, the principal curvatures are $\kappa_1 = 3$ and $\kappa_2 = 1$. What is the maximum normal curvature at that point?

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

Answer: (C)

Explanation:

By Euler's formula, the normal curvature in a direction making an angle θ with the principal direction of κ_1 is

$$\kappa_n(\theta) = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta.$$

The maximum occurs when $\cos^2 \theta = 1$ (i.e., along the principal direction of κ_1), giving

$$\kappa_{\max} = \kappa_1 = 3.$$

Hence, the maximum normal curvature is 3.

102. At a non-umbilic point on a surface, Dupin's indicatrix helps classify the local shape of the surface. Which of the following correctly describes the type of indicatrix based on the Gaussian curvature K ?

- A. $K > 0$: hyperbola, $K < 0$: ellipse
- B. $K = 0$: pair of intersecting lines
- C. $K > 0$: ellipse, $K < 0$: hyperbola
- D. $K < 0$: parabola

Answer: (C)

Explanation:

Dupin's indicatrix is used to describe the local geometry near a non-umbilic point:

If $K > 0$ (elliptic point), the indicatrix is an ellipse.

If $K < 0$ (hyperbolic point), the indicatrix is a hyperbola.

If $K = 0$ (parabolic point), the indicatrix degenerates into a pair of lines.

Hence, the correct answer is (C).

103. Let u and v be two tangent vectors at a point on a smooth surface. These directions are said to be conjugate if:

A. $\mathbb{I}(u, u) = 0$

B. $\mathbb{I}(u, v) = 0$

C. $\langle u, v \rangle = 0$ with respect to the first fundamental form

D. u and v are principal directions

Answer: (B)

Explanation:

In differential geometry, two tangent directions u and v at a point on a smooth surface are called conjugate if the second fundamental form vanishes when evaluated on them, that is, $\mathbb{I}(u, v) = 0$.

The second fundamental form $\mathbb{I}$ measures how the surface bends in a given direction. If $\mathbb{I}(u, v) = 0$, then the normal curvature in the direction of any linear combination of u and v can be expressed as a linear combination of the normal curvatures in the u and v directions. This condition defines conjugate directions.

Hence, the correct choice is (B).

104. Let the surface be given as the graph $z = f(x, y) = x^2 + 3y^2$. The Gaussian curvature K at the origin $(0, 0, 0)$ equals:

A. 0

B. 6

C. 12

D. -12

Answer: (C)

Explanation:

For a Monge patch $z = f(x, y)$, the Gaussian curvature is

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}.$$

Here $f_x = 2x$, $f_y = 6y$, $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = 6$, $f_{xy} = 0$. At the origin $(0, 0)$, $f_x = f_y = 0$, so

$$K(0, 0) = \frac{2 \cdot 6 - 0}{(1 + 0)^2} = 12.$$

Hence, the correct answer is (C).

105. Which of the following surfaces can be developed onto a plane without stretching, i.e., are locally isometric to the plane?

- A. Cylinder
- B. Sphere
- C. Torus
- D. Paraboloid

Answer: (A)

Explanation:

Two surfaces are locally isometric if there exists a map between them that preserves lengths along curves, equivalently preserving the first fundamental form.

A cylinder is a developable surface: it can be “unrolled” onto a plane without stretching. The mapping $(u, v) \mapsto (u, R \sin(v/R), R \cos(v/R))$ (for radius R) preserves distances along the surface, showing the local isometry.

Other surfaces, like the sphere, torus, or paraboloid, cannot be flattened onto a plane without distortion of lengths. Therefore, the correct answer is (A).

106. Consider a surface of revolution obtained by rotating the curve $y = f(x)$ about the x -axis. The Gaussian curvature K at a point on the surface is given by:

- A. $K = -\frac{f''}{f(1 + (f')^2)^2}$
- B. $K = \frac{f''}{f(1 + (f')^2)^2}$
- C. $K = \frac{f''}{(1 + (f')^2)^2}$
- D. $K = \frac{f''f}{(1 + (f')^2)^2}$

Answer: (B)

Explanation:

For a surface of revolution generated by rotating $y = f(x)$ about the x -axis, the first fundamental form coefficients are:

$$E = 1 + (f')^2, \quad F = 0, \quad G = f^2.$$

The second fundamental form coefficients are:

$$L = \frac{f''}{\sqrt{1 + (f')^2}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{f'}{f\sqrt{1 + (f')^2}}.$$

The Gaussian curvature is:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{LN}{EG} = \frac{\frac{f''}{\sqrt{1+(f')^2}} \cdot \frac{f'}{f\sqrt{1+(f')^2}}}{(1 + (f')^2)f^2} \sim \frac{f''}{f(1 + (f')^2)^2}.$$

Hence, the Gaussian curvature at a point on the surface is

$$K = \frac{f''}{f(1 + (f')^2)^2}.$$

107. At a point on a smooth surface, the normal curvature in a direction making an angle θ with the principal direction corresponding to curvature κ_1 is given by:

A. $\kappa_n(\theta) = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta$

B. $\kappa_n(\theta) = \kappa_1 \cos \theta + \kappa_2 \sin \theta$

C. $\kappa_n(\theta) = \kappa_1 \sin^2 \theta + \kappa_2 \cos^2 \theta$

D. $\kappa_n(\theta) = \kappa_1 \cos^3 \theta + \kappa_2 \sin^3 \theta$

Answer: (A)

Explanation:

Euler's theorem states that for any direction at a point on a surface, the normal curvature $\kappa_n(\theta)$ is related to the principal curvatures κ_1 and κ_2 by

$$\kappa_n(\theta) = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta,$$

where θ is measured from the direction corresponding to κ_1 . This formula expresses the quadratic variation of normal curvature with direction. Hence, the correct choice is (A).

108. The nontrivial solution of the integral equation:

$$x(t) = \lambda \int_0^1 e^{t+s} x(s) ds$$

is:

A. t

B. t^2

C. e^{e^2}

D. e^t

Answer: (D)

Explanation:

Rewrite the integral equation:

$$x(t) = \lambda e^t \int_0^1 e^s x(s) ds.$$

Let $c = \int_0^1 e^s x(s) ds$. Then

$$x(t) = \lambda c e^t.$$

Substitute back into c :

$$c = \int_0^1 e^s (\lambda c e^s) ds = \lambda c \int_0^1 e^{2s} ds = \lambda c \frac{e^2 - 1}{2}.$$

For a nontrivial solution $c \neq 0$, we require

$$\lambda = \frac{2}{e^2 - 1}.$$

Hence, the eigenfunction (nontrivial solution) is

$$x(t) = e^t.$$

Option (D) is correct.

109. Eigenvalues of the homogeneous Fredholm integral equation:

$$x(t) = \lambda \int_0^1 (1 - 3ts)x(s) ds$$

are:

- A. 1, 2
- B. 2, -2
- C. 2, -1
- D. 1, -2

Answer: (B)

Explanation:

Assume $x(t) = a + bt$. Substitute into the integral equation:

$$a + bt = \lambda \left[\left(a + \frac{b}{2} \right) - t \left(\frac{3a}{2} + b \right) \right].$$

Equating coefficients gives the system:

$$(1 - \lambda)a - \frac{\lambda}{2}b = 0, \quad \frac{3\lambda}{2}a + (1 + \lambda)b = 0.$$

Nontrivial solution exists if determinant vanishes:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -\frac{\lambda}{2} \\ \frac{3\lambda}{2} & 1 + \lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda^2 = 4 \implies \lambda = 2, -2.$$

110. The solution of the homogeneous integral equation:

$$x(t) = \lambda \int_0^1 tsx(s) ds, \quad \text{for } \lambda \neq 0, \text{ is:}$$

- A. t^2
- B. $1 + t^2$
- C. t
- D. $1 + t$

Answer: (C)

Explanation:

The kernel is separable: $K(t, s) = ts$. Assume $x(t) = t$. Then

$$\int_0^1 sx(s) ds = \int_0^1 s^2 ds = \frac{1}{3}.$$

Thus,

$$x(t) = \lambda t \cdot \frac{1}{3} = \frac{\lambda}{3}t.$$

Hence $x(t) = t$ is an eigenfunction corresponding to $\lambda \neq 0$.

111. Consider the linear programming problem:

$$\text{Maximize } Z = 4x + 3y \quad \text{s.t. } 2x + y \leq 8, x \leq 3, y \leq 4, x, y \geq 0.$$

Find the optimal solution.

- A. $(x, y) = (3, 2), Z = 18$
- B. $(x, y) = (2, 4), Z = 20$
- C. $(x, y) = (3, 1), Z = 15$
- D. $(x, y) = (0, 4), Z = 12$

Answer: (A)

Explanation:

The feasible region is determined by the constraints:

$$2x + y \leq 8, \quad x \leq 3, \quad y \leq 4, \quad x, y \geq 0.$$

The corner points of the feasible region are:

$$(0, 0), (3, 0), (3, 2), (0, 4).$$

Evaluate the objective function $Z = 4x + 3y$ at each corner point:

$$Z(0, 0) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$$

$$Z(3, 0) = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 0 = 12$$

$$Z(3, 2) = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12 + 6 = 18$$

$$Z(0, 4) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12$$

The maximum value occurs at $(x, y) = (3, 2)$ with $Z = 18$.

112. A single-server queuing system has Poisson arrivals with $\lambda = 4$ per hour and exponential service with $\mu = 6$ per hour. Compute the average number of customers in the system.

- A. 0.5
- B. 2
- C. 1
- D. 1.5

Answer: (B)

Explanation:

For an M/M/1 queue, the average number of customers in the system is given by

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}.$$

Here, $\lambda = 4$ and $\mu = 6$, so

$$L = \frac{4}{6 - 4} = \frac{4}{2} = 2.$$

113. Consider a deterministic inventory system with demand $D = 120$ units/month, ordering cost $C_0 = 60$, holding cost $h = 3$. Find EOQ.

- A. 40
- B. 60
- C. 70
- D. 100

Answer: (C)

Explanation:

The Economic Order Quantity (EOQ) formula is

$$EOQ = \sqrt{\frac{2C_0D}{h}}.$$

Here,

$$C_0 = 60, \quad D = 120, \quad h = 3.$$

Substitute values:

$$EOQ = \sqrt{\frac{2 \cdot 60 \cdot 120}{3}} = \sqrt{\frac{14400}{3}} = \sqrt{4800} \approx 69.28 \approx 70.$$

Thus, the EOQ is approximately 70 units.

114. A 2x2 zero-sum game has payoff matrix:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Find the value of the game.

- A. 2
- B. 2.5
- C. 3
- D. 3.2

Answer: (B)

Explanation:

For a 2x2 zero-sum game with payoff matrix

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

the value of the game is

$$V = \frac{ad - bc}{a - b - c + d}.$$

Here,

$$a = 3, \quad b = 1, \quad c = 2, \quad d = 4.$$

Compute numerator:

$$ad - bc = (3)(4) - (1)(2) = 12 - 2 = 10$$

Compute denominator:

$$a - b - c + d = 3 - 1 - 2 + 4 = 4$$

Hence,

$$V = \frac{10}{4} = 2.5$$

So the value of the game is 2.5.

115. In a two-server queue with $\lambda = 10$, $\mu = 7$, find traffic intensity.

- A. 0.7
- B. 0.71
- C. 0.72
- D. 0.75

Answer: (B)

Explanation:

Traffic intensity for an $M/M/s$ queue is given by

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$$

Here, $\lambda = 10$, $\mu = 7$, and $s = 2$ servers.

$$\rho = \frac{10}{2 \times 7} = \frac{10}{14} \approx 0.714$$

Rounded to two decimal places, the traffic intensity is 0.71.

116. Consider replacement problem: maintenance cost $C(t) = 5 + t$, replacement cost 40. Find optimal replacement time.

- A. 5.94
- B. 8.94
- C. 7.74
- D. 8.24

Answer: (B)

Explanation:

Let the total cost over time t be

$$TC(t) = \text{replacement cost} + \text{maintenance cost} = 40 + \int_0^t (5 + s)ds$$

Compute the integral:

$$\int_0^t (5 + s)ds = 5t + \frac{t^2}{2}$$

So total cost:

$$TC(t) = 40 + 5t + \frac{t^2}{2}$$

Average cost per unit time:

$$AC(t) = \frac{TC(t)}{t} = \frac{40 + 5t + t^2/2}{t} = \frac{40}{t} + 5 + \frac{t}{2}$$

To minimize $AC(t)$, take derivative w.r.t t and set to zero:

$$\frac{d}{dt}AC(t) = -\frac{40}{t^2} + \frac{1}{2} = 0 \implies \frac{1}{2} = \frac{40}{t^2} \implies t^2 = 80 \implies t = \sqrt{80} \approx 8.94$$

117. Solve NLM problem: Maximize $f(x, y) = 2x + y$ subject to $x + y = 6$.

A. $(6, 0), f = 12$

B. $(4, 2), f = 10$

C. $(3, 3), f = 9$

D. $(0, 6), f = 6$

Answer: (A)

Explanation:

To solve the nonlinear programming problem using Lagrange multipliers, define the Lagrangian:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 2x + y + \lambda(6 - x - y)$$

Take partial derivatives and set them to zero:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2 - \lambda = 0 \implies \lambda = 2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 1 - \lambda = 0 \implies \lambda = 1$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 6 - x - y = 0 \implies x + y = 6$$

From the first two equations, there is no common λ , which indicates the maximum occurs at a boundary of the feasible region. The constraint $x + y = 6$ gives possible boundary points: $(6, 0)$ and $(0, 6)$.

Evaluate $f(x, y)$ at these points:

$$f(6, 0) = 2 \cdot 6 + 0 = 12$$

$$f(0, 6) = 2 \cdot 0 + 6 = 6$$

The maximum occurs at $(x, y) = (6, 0)$ with $f = 12$.

118. A system has 2 components in series, each with reliability 0.9. Find the system reliability.

- A. 0.81
- B. 0.85
- C. 0.9
- D. 0.95

Answer: (A)

Explanation:

For components in series, system reliability is the product of individual reliabilities:

$$R_{\text{system}} = R_1 \times R_2 = 0.9 \times 0.9 = 0.81$$

Hence, the system reliability is 0.81.

119. Dynamic programming: Decision $x_1 = 0, 1$ cost $C_1(0) = 3, C_1(1) = 2, x_2$ cost $C_2(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$. Minimum total cost?

- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. 5

Answer: (B)

Explanation:

Consider the possible decisions for x_1 and x_2 :

If $x_1 = 0$, then $C_2(0, 0) = 0, C_2(0, 1) = 2$. Minimum is 0 at $x_2 = 0$. Total cost: $C_1(0) + \min C_2 = 3 + 0 = 3$.

If $x_1 = 1$, then $C_2(1, 0) = 1, C_2(1, 1) = 3$. Minimum is 1 at $x_2 = 0$. Total cost: $C_1(1) + \min C_2 = 2 + 1 = 3$.

Minimum total cost among all options is 3.

120. Integer programming: Max $Z = 2x + 3y$ s.t. $x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$, integers. Optimal solution?

- A. $(0, 4), Z = 12$
- B. $(2, 2), Z = 10$
- C. $(3, 1), Z = 9$
- D. $(1, 3), Z = 8$

Answer: (A)

Explanation:

List all feasible integer points satisfying $x + y \leq 4$ and $x, y \geq 0$:

$(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1), (4, 0)$

Compute $Z = 2x + 3y$ for each feasible point:

$$(0, 4) \implies Z = 0 + 12 = 12$$

$$(2, 2) \implies Z = 4 + 6 = 10$$

$$(3, 1) \implies Z = 6 + 3 = 9$$

$$(1, 3) \implies Z = 2 + 9 = 11 \quad (\text{also feasible})$$

The maximum value is $Z = 12$ at $(x, y) = (0, 4)$.

Hence, the optimal integer solution is $(0, 4)$ with $Z = 12$.

121. A fair coin is tossed twice. What is the probability of getting at most one head?

- A. $\frac{1}{4}$
- B. $\frac{1}{2}$
- C. $\frac{3}{4}$
- D. 1

Answer: (C)

Explanation:

The sample space for two tosses is:

$$\{HH, HT, TH, TT\}.$$

The outcomes with at most one head are:

$$\{HT, TH, TT\},$$

which is 3 outcomes out of 4.

Thus,

$$P(\text{at most one head}) = \frac{3}{4}.$$

Hence, the correct answer is (C).

122. A disease has prevalence 1%. A diagnostic test has sensitivity 99% and specificity 95%. If the test is positive, what is the posterior probability that the subject has the disease?

A. 0.01
B. 0.091
C. 0.167
D. 0.50

Answer: (C)

Explanation:

Let D denote the event that the subject has the disease, and T^+ the event that the test is positive.

We are given:

$$\begin{aligned}P(D) &= 0.01, & P(D^c) &= 0.99, \\P(T^+|D) &= 0.99 \quad (\text{sensitivity}), \\P(T^+|D^c) &= 1 - \text{specificity} = 1 - 0.95 = 0.05.\end{aligned}$$

Using Bayes' theorem:

$$P(D | T^+) = \frac{P(T^+|D)P(D)}{P(T^+|D)P(D) + P(T^+|D^c)P(D^c)}.$$

Substitute the values:

$$P(D | T^+) = \frac{0.99(0.01)}{0.99(0.01) + 0.05(0.99)}.$$

Compute the numerator:

$$0.99 \times 0.01 = 0.0099.$$

Compute the denominator:

$$0.0099 + 0.05 \times 0.99 = 0.0099 + 0.0495 = 0.0594.$$

Thus,

$$P(D | T^+) = \frac{0.0099}{0.0594} \approx 0.1667.$$

Therefore, the posterior probability is approximately 0.167, corresponding to option (C).

123. Let a random variable X have PDF

$$f(x) = 3x^2, \quad 0 < x < 1.$$

Find the CDF $F(x)$.

A. x

- B. x^2
- C. x^3
- D. $1 - x^3$

Answer: (C)

Explanation:

The cumulative distribution function (CDF) is obtained by integrating the PDF from the lower limit up to x :

$$F(x) = \int_0^x 3t^2 dt.$$

Evaluate the integral:

$$F(x) = t^3 \Big|_0^x = x^3.$$

Thus, the CDF is

$$F(x) = x^3, \quad 0 < x < 1.$$

Hence, the correct answer is (C).

124. Let $X \sim \text{Binomial}(n = 10, p = 0.3)$. What is $E[X]$?

- A. 1
- B. 3
- C. 7
- D. 10

Answer: (B)

Explanation:

For a Binomial random variable $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, the expected value is

$$E[X] = n \cdot p.$$

Here, $n = 10$ and $p = 0.3$, so

$$E[X] = 10 \times 0.3 = 3.$$

Therefore, the correct answer is (B).

125. Let the joint PDF of (X, Y) be

$$f(x, y) = 4xy, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1.$$

Find the marginal density $f_X(x)$.

- A. $4x$
- B. $2x$

C. $4x(1-x)$

D. $x(1-x)$

Answer: (B)

Explanation:

The marginal density of X is obtained by integrating the joint PDF over all possible values of Y :

$$f_X(x) = \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 4xy dy.$$

Since x is constant with respect to y :

$$f_X(x) = 4x \int_0^1 y dy = 4x \cdot \frac{1}{2} = 2x, \quad 0 < x < 1.$$

Thus, the correct marginal density is $f_X(x) = 2x$, corresponding to option (B).

126. What is the characteristic function of a Poisson(λ) random variable?

A. $\exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}$

B. $e^{\lambda it}$

C. $(1 - \lambda) + \lambda e^{it}$

D. $\frac{1}{1 - \lambda(e^{it} - 1)}$

Answer: (A)

Explanation:

Let $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. By definition, the characteristic function is

$$\phi_X(t) = E[e^{itX}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} P(X = k).$$

The PMF of a Poisson random variable is

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Substitute into the sum:

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!}.$$

Recognizing the exponential series:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{\lambda e^{it}}.$$

Therefore,

$$\phi_X(t) = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it} - 1)}.$$

Hence, the correct answer is (A).

127. Suppose $\mu = 10$ and $\text{Var}(X) = 25$. Use Chebyshev's inequality to bound

$$P(|X - 10| \geq 10).$$

- A. 1
- B. 0.5
- C. 0.25
- D. 0.10

Answer: (C)

Explanation:

Chebyshev's inequality states that for any random variable X with finite mean μ and variance σ^2 , and for any $k > 0$:

$$P(|X - \mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}.$$

Here, $\mu = 10$, $\sigma^2 = 25$, and $k = 10$. Thus,

$$P(|X - 10| \geq 10) \leq \frac{25}{10^2} = \frac{25}{100} = 0.25.$$

Therefore, the upper bound is 0.25, corresponding to option (C).

128. Given points $(1, 1)$, $(2, 4)$, $(3, 9)$, find the least squares estimate of slope b in

$$y = a + bx.$$

- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. 5

Answer: (C)

Explanation:

For simple linear regression, the slope is estimated as

$$b = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}.$$

Compute the means:

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3}{3} = 2, \quad \bar{y} = \frac{1 + 4 + 9}{3} = \frac{14}{3}.$$

Compute the numerator:

$$\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = (1 - 2)(1 - 14/3) + (2 - 2)(4 - 14/3) + (3 - 2)(9 - 14/3)$$

$$= (-1)(-11/3) + 0 + (1)(13/3) = 11/3 + 13/3 = 24/3 = 8.$$

Compute the denominator:

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = (1 - 2)^2 + (2 - 2)^2 + (3 - 2)^2 = 1 + 0 + 1 = 2.$$

Thus,

$$b = \frac{8}{2} = 4.$$

Hence, the correct answer is (C).

129. Let $X_1, \dots, X_{50}$ be i.i.d. with $E[X_i] = 2$ and $\text{Var}(X_i) = 4$. Approximate

$$P\left(\sum_{i=1}^{50} X_i > 110\right)$$

using the Central Limit Theorem.

- A. 0.075
- B. 0.1587
- C. 0.2398
- D. 0.3413

Answer: (C)

Explanation:

Let $S = \sum_{i=1}^{50} X_i$. Then

$$E[S] = 50 \cdot 2 = 100, \quad \text{Var}(S) = 50 \cdot 4 = 200, \quad \sigma_S = \sqrt{200} \approx 14.142.$$

By the Central Limit Theorem,

$$\frac{S - E[S]}{\sigma_S} \approx N(0, 1).$$

Standardize the probability:

$$P(S > 110) = P\left(\frac{S - 100}{14.142} > \frac{110 - 100}{14.142}\right) = P(Z > 0.7071),$$

where $Z \sim N(0, 1)$.

From standard normal tables:

$$P(Z > 0.7071) \approx 0.2398.$$

Thus, the approximate probability is 0.2398, corresponding to option (C).

130. Let $X_1, \dots, X_n$ be i.i.d. $N(\mu, \sigma^2)$ with both μ and σ^2 unknown. For testing $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$, the likelihood ratio test (LRT) leads to which of the following rejection rules at significance level α ?

- A. Reject H_0 if $\frac{|\bar{X} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} > z_{1-\alpha/2}$ (using true σ)
- B. Reject H_0 if $|\bar{X} - \mu_0| > c$, where c is chosen so that $P(|\bar{X} - \mu_0| > c) = \alpha$ (implicit)
- C. Reject H_0 if $\frac{|\bar{X} - \mu_0|}{S/\sqrt{n}} > t_{n-1, 1-\alpha/2}$, where S^2 is sample variance.
- D. Reject H_0 if $\frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{S^2} > \chi_{n, 1-\alpha}^2$

Answer: (C)

Explanation:

When both μ and σ^2 are unknown, the likelihood ratio test (LRT) for testing

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

uses the t -statistic:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}},$$

where S^2 is the sample variance.

Under H_0 , $T \sim t_{n-1}$. Hence, we reject H_0 if

$$|T| > t_{n-1, 1-\alpha/2}.$$

This accounts for the fact that σ^2 is unknown and must be estimated from the data, making option (C) correct.